

Hilbert y los fundamentos de la Geometría.

J. M. Almira

Universidad de Murcia

**Conferencia inaugural del curso 2024/205. Falcultad de Matemáticas,
Univ. de las Islas Baleares, 02 de Octubre, 2024**

Antecedentes

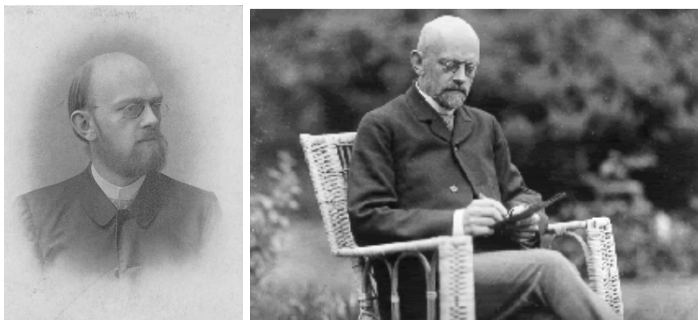


Figura: Hilbert (1862-1943) en torno a 1900 y mucho después, en 1922

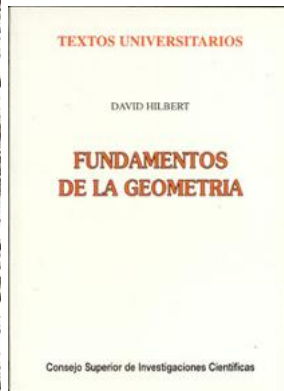
Antecedentes

Hilbert en 1899: Antecedentes:

- Nace en Königsberg y allí estudia matemáticas. (Solo pasa un semestre fuera)
- Tesis doctoral: Sobre teoría de invariantes algebraicos.
- Prueba de que π y $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ son trascendentes.
- Solución del **Problema de Gordan** sobre invariantes algebraicos.
- **Nullstellensatz**: establecimiento del **Diccionario Álgebra-Geometría** que da fundamento a la Geometría Algebraica moderna.
- Publicación de un **Informe sobre el estado del arte en Teoría Algebraica de Números**, por encargo de la Sociedad de Matemáticos Alemanes.
- Publicación de sus “**Fundamentos de la Geometría**”, en 1899.

Los fundamentos de la Geometría

En 1898 Hilbert imparte un curso -en Gotinga- sobre Fundamentos de la Geometría y en 1899 publica un libro dedicado a dicho tema.



Los fundamentos de la Geometría

Durante el S. XIX los matemáticos lograron apartarse de la Geometría Euclídea, introduciendo diferentes tipos de Geometrías:

- Geometría Proyectiva
- Geometrías no-Euclídeas -de tipo hiperbólico y de tipo elíptico-
- Geometría diferencial, Geometrías Riemannianas, etc.

Además, se realizaron importantes esfuerzos por axiomatizar la Geometría Euclídea, y se investigaron los resultados que se pueden derivar evitando el axioma de las paralelas (Geometría Absoluta). Otro enfoque que se consideró también importante fue la distinción entre Geometría Sintética -sin coordenadas- y Geometría Analítica. También se había comenzado a estudiar la Geometría Algebraica, etc.

Los fundamentos de la Geometría

Por ejemplo, en Geometría Absoluta se demostró el siguiente importante resultado:

Teorema (de los tres mosqueteros, Legendre-Saccheri):

Denotemos, para cada triángulo $\triangle ABC$ del plano, por:

$$\zeta = \zeta(\triangle ABC) = \alpha + \beta + \gamma$$

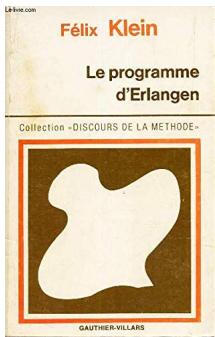
a la suma de sus ángulos internos. Entonces:

- (a) Si para algún triángulo $\triangle ABC$ se satisface que $\zeta(\triangle ABC) < \pi$, lo mismo sucede para todo triángulo del plano.
- (b) Si para algún triángulo $\triangle ABC$ se satisface que $\zeta(\triangle ABC) = \pi$, lo mismo sucede para todo triángulo del plano.
- (c) Si para algún triángulo $\triangle ABC$ se satisface que $\zeta(\triangle ABC) > \pi$, lo mismo sucede para todo triángulo del plano.

Los fundamentos de la Geometría

Otras contribuciones fundamentales para el desarrollo de la Geometría fueron:

- El programa Erlangen de F. Klein (y S. Lie), formalizado por Klein en 1872.
- El trabajo fundacional de Riemann "Sobre las hipótesis que subyacen en los fundamentos de la Geometría" (1854).



SOBRE LAS HIPOTESIS QUE ESTAN EN LA BASE DE LA GEOMETRIA

BERNHARD RIEMANN

(Traducción de Roberto Torretti)

NOTA DEL EDITOR DEL ORIGINAL ALEMAN: El autor leyó el presente ensayo el 19 de junio de 1854 en un coloquio con la Facultad de Filosofía de Göttingen, que tuvo lugar con motivo de su habilitación. Ello explica la forma de la exposición, en la cual las investigaciones analíticas solamente se inician. Me propongo referirme próximamente a éstas en un artículo especial. Braunschweig, julio de 1867. R. DEDEKIND.¹

Como es sabido, la geometría presupone como algo dado tanto el concepto del espacio como los primeros conceptos fundamentales para las construcciones en el espacio. De ellos sólo definiciones nominales, mientras que las determinaciones esenciales se presentan en la forma de axiomas. La relación entre estos supuestos permanece en la oscuridad; no se percibe si su entrelazamiento es necesario, ni en qué medida lo es; tampoco se sabe a priori si es siquiera posible.

Desde Euclides hasta Legendre —para nombrar al más celebre traditista moderno de geometría— tal oscuridad no ha sido disipada ni por los matemáticos ni por los filósofos. Ello se debe probablemente a que nadie ha examinado el concepto general de cantidad multidimensional, bajo el cual caen las magnitudes espaciales. Me he propuesto pues en primer término el problema de construir el concepto de una cantidad multidimensional partiendo de conceptos generales de cantidad. Podré en evidencia que una cantidad multidimensional admite [8] diversas relaciones métricas y que el espacio constituye, por lo tanto, sólo un caso particular entre las

Dahlgren 21 (1978), pp. 151-164

151

Geometrías Afín y Projectiva: Tres teoremas importantes

Nosotros vamos a prestar especial atención a la Geometría Projectiva:

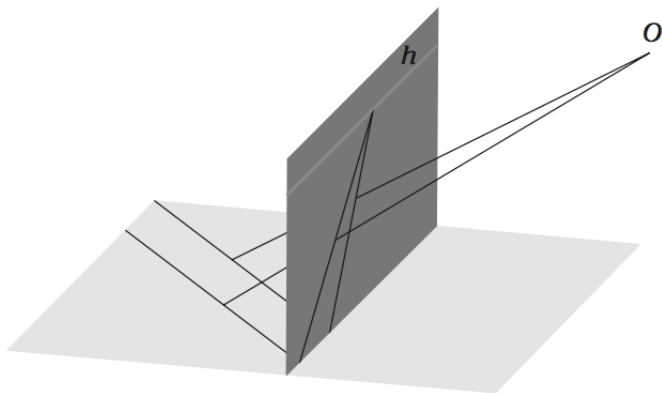
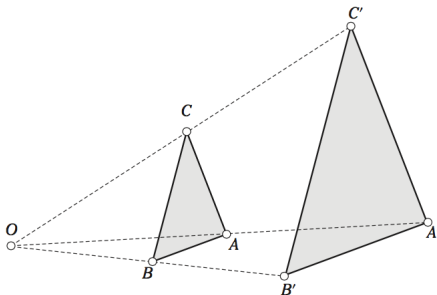


Figura: Proyección central desde O . Las proyectividades son composiciones de este tipo de aplicaciones.

Geometrías Afín y Proyectiva: Tres teoremas importantes

Teorema (Desargues):

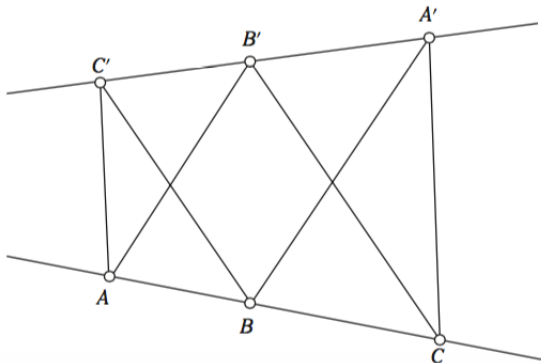
Si dos triángulos están situados en un plano de modo que los lados correspondientes son paralelos dos a dos, entonces las rectas que unen los vértices correspondientes o bien son concurrentes en un punto o bien son paralelas. Además, si dos triángulos están situados en un plano de modo que las rectas que unen los vértices correspondientes concurren en un punto o son paralelas y, además, hay dos pares de lados correspondientes que son paralelos, entonces los lados del tercer par correspondiente son también paralelos.



Geometrías Afín y Projectiva: Tres teoremas importantes

Teorema (Pappus):

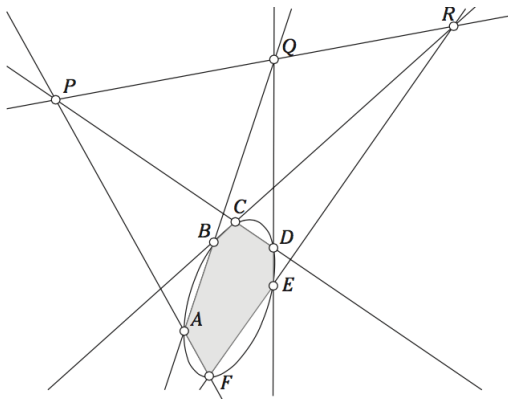
Sean r y r' dos rectas distintas que se cortan y supongamos que A, B, C son puntos de r , A', B', C' son puntos de r' y que ninguno de estos puntos está en la intersección de r y r' . Si CB' es paralela a BC' y CA' es paralela a AC' entonces AB' es paralela a BA' .



Geometrías Afín y Projectiva: Tres teoremas importantes

Teorema (Pascal):

Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están forzosamente alineados.



Geometrías Afín y Proyectiva: Tres teoremas importantes

- Los teoremas “de Desargues” y “de Pappus” estaban ya en “Los Porismas” de Euclides. (S. IV d.C), que se perdieron.
- Aparecen en el libro VII de la “Colección matemática” de Pappus de Alejandría. (S. IV d.C.), atribuidos a Euclides.
- G. Desargues (independientemente) prueba el teorema que lleva su nombre en 1636 en “Perspective”.
- B. Pascal publica su teorema (generalización de Pappus a cónicas) en “Ensayo sobre las cónicas” (1640).
- Estos teoremas tienen versiones afín y proyectiva. Poncelet los coloca en el centro de su “Tratado sobre las propiedades proyectivas de las figuras” (1822).

Geometrías Afín y Proyectiva: Tres teoremas importantes

Teorema de invariancia (Desargues):

Supongamos que los puntos A, B, C, D pertenecen todos a la misma recta r y que $p_{O,\pi}(r) = r'$ para cierta proyección central $p_{O,\pi}$. Entonces

$$\frac{AC}{BC} \frac{BD}{AD} = \frac{A'C'}{B'C'} \frac{B'D'}{A'D'}$$

donde $A' = p_{O,\pi}(A)$, $B' = p_{O,\pi}(B)$, $C' = p_{O,\pi}(C)$, $D' = p_{O,\pi}(D)$.

Se sigue que la cantidad

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \frac{BD}{AD},$$

a la que llamamos razón doble de los puntos A, B, C y D (dados en ese preciso orden), es un invariante proyectivo. Este descubrimiento produjo cierta inquietud en los matemáticos del siglo XVIII: ¿cómo hemos dado con una propiedad proyectiva que, por otra parte, está definida en términos de la métrica usual del plano, si habíamos enfatizado el hecho de que la geometría proyectiva nada tiene que ver con el estudio de distancias o ángulos?

Geometrías Afín y Proyectiva: Tres teoremas importantes

- Christian von Staud, en su “Geometría de posición” (1847) usa Desargues para introducir coordenadas en el plano proyectivo.
- Idea clave: El Teorema de invarianza de Desargues solo requiere ser cierto para cuaternas armónicas (de razón doble -1), y estas no requieren congruencia para su definición.
- El trabajo de von Staud conduce a una amplia discusión sobre el papel de los argumentos de continuidad en Geometría Proyectiva y, en particular, para la demostración de Desargues y Pappus.
- ¿Es posible prescindir de la completitud y de la propiedad arquimediana para demostrar estos teoremas?

Geometrías Afín y Proyectiva: Tres teoremas importantes

En 1891, en la reunión de la recién fundada Sociedad Matemática Alemana, que tuvo lugar en Halle, Hilbert escuchó una conferencia del geómetra Herman Wiener que le impresionó:



Figura: Hermann Wiener (1857-1939) “Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie” (Sobre los fundamentos y la estructura de la Geometría)

Geometrías Afín y Proyectiva: Tres teoremas importantes

Según relata Blumenthal, tras la charla y, de vuelta a Königsberg, Hilbert afirmó entusiasmado que uno debería poder hacer geometría sin necesidad de atarse a las ideas preconcebidas de punto, recta o plano “a la Euclides”. Uno debería poder decir “mesas”, “sillas” y “jarras de cerveza” en vez de “puntos”, “rectas” y “planos” y no por ello los resultados perderían su validez o su interés. Además, **Wiener había afirmado** en su conferencia, sin demostrarlo, que **es posible probar los teoremas fundamentales de la Geometría Proyectiva y, en particular, los Teoremas de Desargues, Pascal y Pappus, sin recurrir a argumentos de continuidad.**

Los fundamentos de la Geometría

Cursos impartidos por Hilbert sobre Geometría antes de 1899

- 1891: Königsberg. Un curso sobre *Geometría Proyectiva*, sin coordenadas.
- 1893: Königsberg. Un curso sobre *Geometrías no Euclídeas*, basado en el enfoque axiomático de Pasch. (No se impartió porque solo se matriculó un alumno)
- 1894: Königsberg. Un curso sobre *Los fundamentos de la Geometría*. Esta vez resultó fundamental la monografía recién publicada por **Hertz** “**Los principios de la mecánica presentados de una forma nueva**”.
- 1898: Gotinga. Un curso sobre *Los fundamentos de la Geometría* -que daría lugar a la publicación de su famosa monografía de 1899.

Visión de Hertz de los principios de la mecánica

- Una teoría física es una imagen que nos formamos de cierto conjunto de fenómenos de la naturaleza. Como es obvio, podemos formar imágenes distintas de la misma cosa.
- Una imagen es permisible si no contradice las leyes del pensamiento (es decir, las leyes de la lógica).
- Una imagen permisible es correcta si sus relaciones internas no contradicen las relaciones que se observan en la naturaleza entre los objetos que describe dicha imagen.
- Finalmente, entre dos imágenes permisibles y correctas de la misma cosa, consideramos más adecuada aquella que es más simple.

Los fundamentos de la Geometría



Los conceptos de **permisibilidad** y **corrección** inspiraron a Hilbert, quien introdujo, en el contexto de los Fundamentos de la Geometría, los conceptos de **consistencia** y **completitud** de una teoría axiomática.

Los fundamentos de la Geometría

- Introduce la Axiomática definitiva para la Geometría de Euclides.
(Supera no solo a Euclides sino también al resto de propuestas realizadas en el S. XIX por matemáticos como M. Pasch o G. Peano).
- Se incluyen demostraciones de consistencia e independencia
- Se analiza el papel desempeñado en Geometría por la propiedad Arquimediana y la propiedad de completitud (que son la base de los argumentos de continuidad)
- Se proponen modelos de Geometrías no Arquimedianas, no Desarguesianas y no Pappusianas
- Para la construcción de los distintos modelos se crea un “cálculo de segmentos” y se utilizan ideas relacionadas con su trabajo anterior en teoría de números.

Axiomas para la Geometría Euclídea

- Axiomas de enlace (o incidencia)
- Axiomas de orden
- Axiomas de congruencia
- Axioma de las paralelas
- Axiomas de continuidad

Axiomas de Enlace o Incidencia

- E.1 Dados dos puntos distintos, existe una única recta que incide sobre ambos puntos.
- E.2 Dados dos puntos distintos, no existe más de una recta que incida sobre ambos puntos.
- E.3 Sobre una recta existen al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no están alineados (es decir, que no están todos simultáneamente sobre la misma recta).

Axiomas de Enlace o Incidencia

- E.4 Dados tres puntos no alineados, existe un plano π que incide sobre los tres puntos. Todo plano contiene al menos un punto.
- E.5 Dados tres puntos no alineados no existe más de un plano que los contenga.
- E.6 Cuando dos puntos de una recta r están en un plano π , todos los puntos de la recta r están en el plano π .
- E.7 Si dos planos tienen un punto en común A , entonces también tienen al menos otro punto en común B .
- E.8 Existen al menos cuatro puntos no situados en el mismo plano.

Los axiomas de Hilbert

Axiomas de Orden

- O.1 Cuando un punto B está situado entre un punto A y otro punto C , entonces A, B, C están alineados y B también está situado entre el punto C y el punto A .
- O.2 Dados dos puntos A, C , siempre existe un punto B (sobre la recta AC determinada por A y C) que está entre los puntos A y C .
- O.3 De tres puntos cualesquiera de una recta no existe más que uno que está entre los otros dos.
- O.4 (Axioma de Pasch) Dados tres puntos A, B, C que no están alineados, y r una recta del plano ABC que determinan dichos puntos, si r pasa por el interior del segmento $\overline{AB}$ (es decir, por el conjunto de puntos que están entre A y B) entonces también pasa por un punto del segmento $\overline{BC}$ o del segmento $\overline{AC}$. (Es decir, si una recta penetra por un lado de un triángulo, debe salir por alguno de los otros lados)

Axiomas de Congruencia

- C.1 Si A, B son dos puntos de una recta r y A' es otro punto de una recta r' (que podría o no coincidir con r) entonces se puede encontrar sobre uno de los lados de r' determinados por A' un punto B' tal que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son congruentes o iguales, lo que se expresa en signos como $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.
- C.2 Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$, entonces $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.
- C.3 Supongamos que el punto B está entre los puntos A y C y que el punto B' está entre los puntos A' y C' . Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, entonces $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Axiomas de Congruencia

- C4** Todo ángulo puede ser transportado de manera congruente a un plano dado, en un semirrecta dada del mismo, sobre una semirrecta dada de antemano, y de manera única.
- C5** Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ satisfacen las congruencias $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, entonces también $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$

Axioma de las Paralelas

- P** Dados un punto P y una recta r que no lo contenga, dentro del plano determinado por ambos existe una única recta r' que pasa por P y no corta a r .

Axiomas de continuidad

- V.1** (Axioma de Arquímedes) Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ existen, sobre la recta determinada por A y B , un conjunto finito de puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de modo que todos los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\dots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ son congruentes con $\overline{CD}$ y el punto B queda entre los puntos A y A_n .
- V.2** (Axioma de plenitud lineal) Los puntos de una recta forman un sistema que no es susceptible de ampliación alguna bajo la condición de conservar la ordenación lineal, el primer axioma de congruencia y el axioma de Arquímedes.

Capítulo 1

- Una vez introducidos todos los axiomas (organizados en torno a las diferentes formas como percibimos el espacio físico -incidencia, orden, congruencia, etc-), se analizan las consecuencias básicas de cada grupo de axiomas.

Capítulo 2

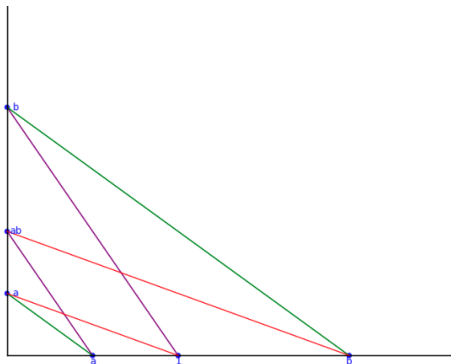
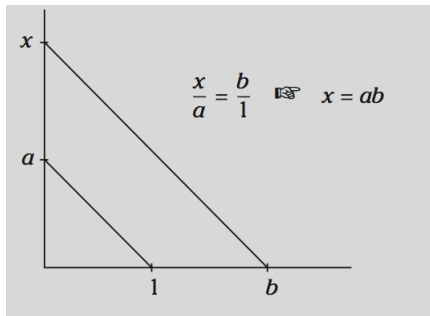
- Consistencia relativa de la Geometría -tal como queda determinada por los axiomas de Hilbert- respecto de la aritmética.
- Independencia mutua de los distintos grupos de axiomas.
- Se derivan algunos resultados de la Geometría Absoluta. En particular, se demuestra, en el caso arquimediano, el Teorema de los tres mosqueteros.
- Se proporciona un modelo de Geometría no Arquimediana (i.e. que verifica todos los grupos de axiomas excepto los de continuidad. (Esto se obtiene de forma independiente al trabajo de Veronese de 1891))

Capítulo 3

- Nueva exposición de la teoría de proporciones de Eudoxo, basada en un cálculo de segmentos que no requiere la **propiedad Arquimediana** ni la **propiedad de plenitud lineal**, pero sí el **Teorema de Pappus**.
- Gracias a la técnica anterior, demuestra el Teorema de Tales y deduce que las ecuaciones de la recta y el plano se mantienen válidas en las geometrías no Arquimedianas.

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

El producto de segmentos se define con una construcción geométrica sencilla: Se fijan dos rectas perpendiculares, r_1, r_2 , se toma un segmento OP (que denotamos $1 = OP$) sobre r_2 y representará la unidad de medida, cuando todo se interprete numéricamente) y dados los segmentos $a = OA, b = OB$ sobre las rectas r_1, r_2 , respectivamente, se traza desde B la paralela a la recta AP , que corta a r_1 en un punto X . Pues bien: $a \cdot b = OX$.



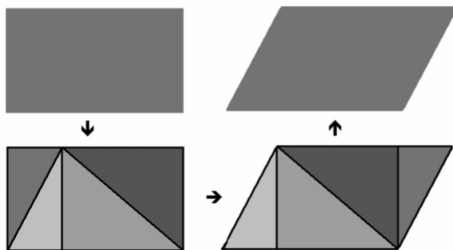
Capítulo 4

- Se introduce el concepto de area para polígonos del plano, sin hacer uso de los axiomas de continuidad (Arquímedes y completitud lineal).

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Definición

Se dice que dos polígonos Γ y Σ son equidescomponibles si se puede dividir cada uno de ellos en un número finito de triángulos $T_1, \dots, T_s$ y $R_1, \dots, R_s$, respectivamente, de modo que $T_i \equiv R_i$ para $i = 1, \dots, s$.

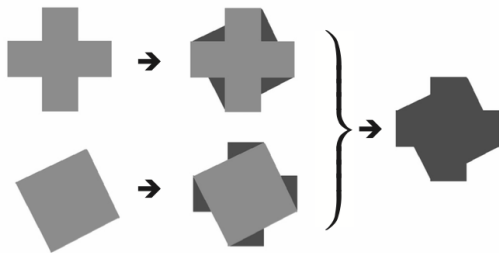


polígonos equidescomponibles

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Definición

Se dice que dos polígonos Γ y Σ son equicomplementarios si se puede añadir un número finito r de triángulos $T_1, \dots, T_r$ al primero y otros r triángulos $R_1, \dots, R_r$ al segundo de modo que los polígonos resultantes son equidescomponibles y, además, $T_i \equiv R_i$ para $i = 1, \dots, r$.



polígonos equicomplementables

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Teorema (caracterización de polígonos de áreas iguales):

Sean Γ y Σ dos polígonos del plano. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Γ y Σ son equicomplementarios.
- (b) Γ y Σ tienen igual área (ver las figuras).

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Corolario:

Si descomponemos un rectángulo en un número finito de triángulos y separamos uno de los triángulos formados, es imposible reconstruir el rectángulo original mediante movimientos con los otros triángulos.

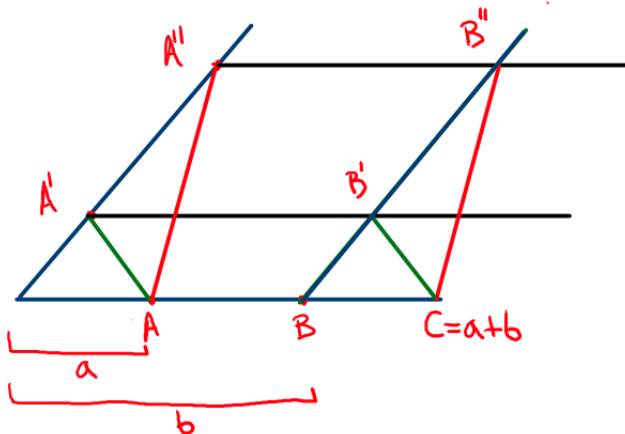
- Esta propiedad es importante porque había sido asumida en numerosas ocasiones como un nuevo axioma de la Geometría (e.g., Zolt en 1881 y Stoltz en 1894).
- F. Schur en 1892 y Killing en 1898 la habían logrado probar en forma de teorema, pero asumiendo la propiedad Arquimediana.
- Hilbert la demuestra en su libro como un resultado de Geometría No Arquimediana -evitando los axiomas de continuidad.

Capítulo 5

- Estudio del Teorema de Desargues en la geometría plana.
- Construye una Geometría no-Desarguesiana que satisface los axiomas de enlace, orden y las paralelas.
- En particular, lo anterior sirve para demostrar la necesidad de los axiomas de congruencia si se quiere probar el Teorema de Desargues.
- Construye un cálculo de segmentos basado en el Teorema de Desargues. El producto no es conmutativo, pero se puede utilizar para construir una geometría analítica con escalares en un cuerpo no conmutativo (anillo con división)
- Si se satisface Pappus, el producto de segmentos es conmutativo.

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

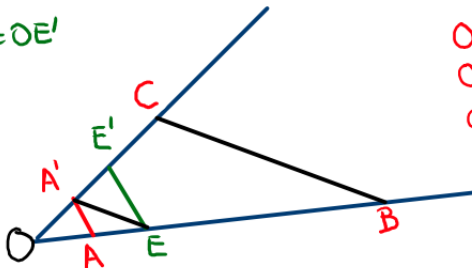
Suma de segmentos



Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Producto de segmentos

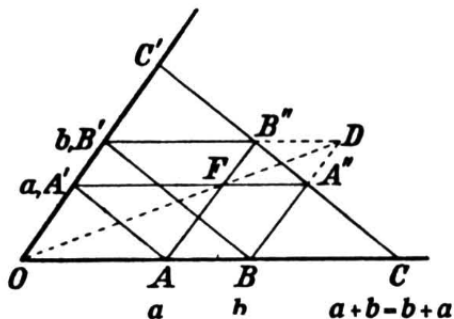
$$1 = OE = OE'$$



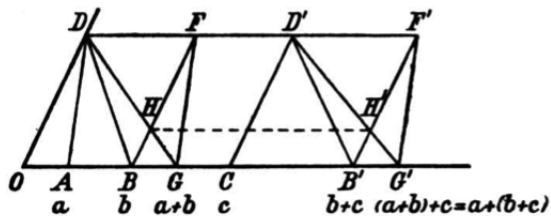
$$\begin{aligned} OA &= a \\ OB &= b \\ OC &= a \cdot b \end{aligned}$$

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA'}{OE} = \frac{OA'}{1} = OA \Rightarrow \underline{\underline{OC = OA \cdot OB}}$$

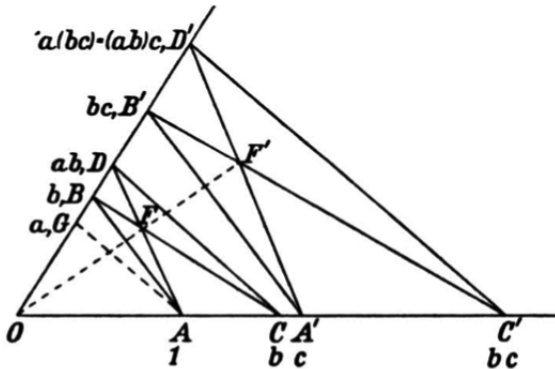
Resumen por capítulos del libro de Hilbert



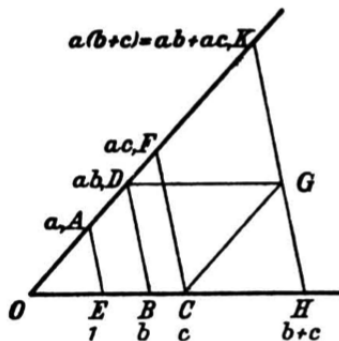
Resumen por capítulos del libro de Hilbert



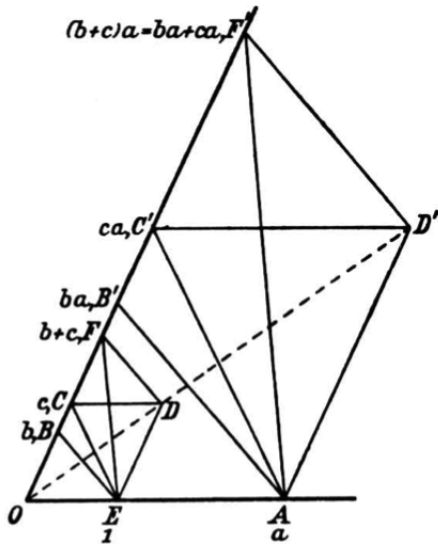
Resumen por capítulos del libro de Hilbert



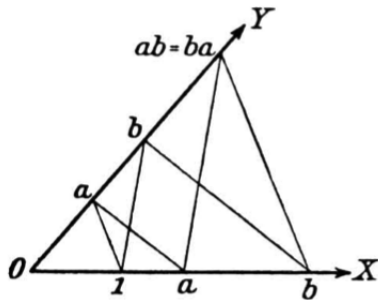
Resumen por capítulos del libro de Hilbert



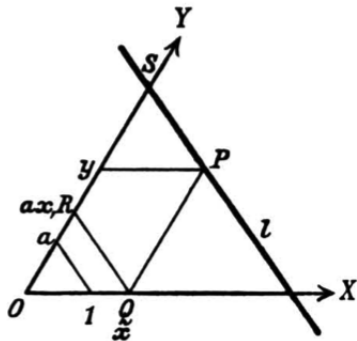
Resumen por capítulos del libro de Hilbert



Resumen por capítulos del libro de Hilbert



Resumen por capítulos del libro de Hilbert



Prueba de que la ecuación de la recta es $y = ax + b$

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Teorema (Hilbert)

Si una Geometría Plana verifica los axiomas de enlace planos (E.1,E.2,E.3), los axiomas de orden y el axioma de las paralelas, entonces la única forma de que dicha geometría se pueda interpretar como la geometría de un plano dentro de una geometría espacial que verifique los axiomas de enlace, orden y paralelas, es que dicha geometría verifique el Teorema de Desargues.

Capítulo 6

- Estudio del Teorema de Pappus.
- Lo deduce de los axiomas de enlace, orden, paralelas y continuidad -evitando los de congruencia.
- Construye una Geometría no Pappusiana que verifica los axiomas de orden, enlace y paralelas -pero no Arquímedes ni congruencia-
- Toda Geometría no Pappusiana debe ser también no Arquimediana.

Capítulo 7

- Estudio de construcciones con regla y patrón (i.e., permitiendo el transporte de ángulos y de segmentos), lo cual se traduce -gracias al Teorema de Pitágoras- en un problema de teoría algebraica de números (extensiones de cuerpos con ciertas propiedades especiales)

Resumen por capítulos del libro de Hilbert

Hay que decir que la axiomática de Hilbert, con la única modificación de cambiar el axioma de las paralelas por la afirmación de que por un punto exterior a una recta dada pasan varias paralelas, es también una axiomática para la Geometría hiperbólica -cosa que no sucede con axiomáticas anteriores, como la propuesta por Pasch. Por supuesto, para la Geometría elíptica, esto no es posible porque dicha Geometría no es Arquimediana.

1900 : La conferencia de París

- En 1900 Hilbert era ya un matemático consagrado. Había logrado resolver algunos de los problemas más importantes de la teoría de invariantes, había puesto orden en la teoría algebraica de números y, además, había sentado las bases de la axiomática moderna aplicando sus ideas sobre consistencia relativa a las distintas geometrías y dando un fundamento sólido para la geometría euclídea. A nadie se le escapaba que sus opiniones tenían un peso importante. Y no solo en Alemania....
- Ese año es llamado por Poincaré para que imparta una conferencia como ponente invitado en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, que coincidiría con la Exposición Universal de París.
- La conferencia de Hilbert, “Sobre los problemas futuros de la **matemática**”, marcaría en buena medida el rumbo de las matemáticas del S. XX...

Bibliografía (básica) recomendada



J. M. ALMIRA, Nullstellensatz revisited, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **65** (3) (2007) 365-369.



J. M. ALMIRA, J.C. SABINA DE LIS, Hilbert. Matemático fundamental, Ed. Nivola, 2007.



J. GRAY, El reto de Hilbert. Ed. Crítica, 2003.



D. HILBERT, Fundamentos de la Geometría, Textos universitarios, CSIC, 1996.

Bibliografía (básica) recomendada



A. JÁUREGUI HERNÁNDEZ, Los teoremas de Pappus y Desargues en los Fundamentos de la Geometría de David Hilbert y su origen en la doctrina de los Porismas, Tesis de Máster, UAM, 2017



C. REID, Hilbert, Springer-Verlag, 1970.



J. ROSELLÓ, Hilbert, Göttingen and the Development of Modern Mathematics, Cambridge Scholars Publishing, 2019.



B. H. YANDELL, The honors class. Hilbert's problems and their solvers, A.K. Peters, 2001.