

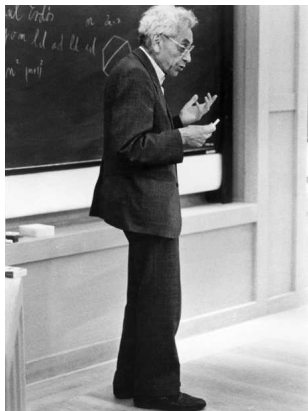
Les matemàtiques de Paul Erdős

Oriol Serra

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona
Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra

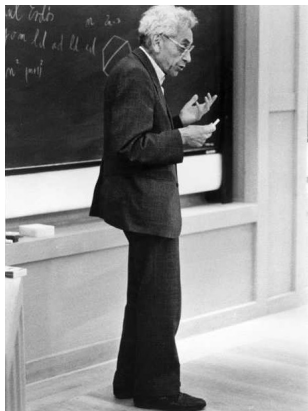
Any Erdős del Grau de Matemàtiques 2025, UIB

Erdős Pál, Budapest 1913–Warsaw 1996



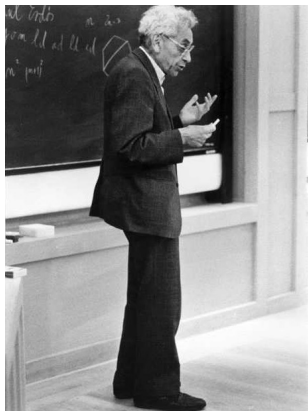
- Neix a Budapest el 26 de març de 1913, fill de professors de matemàtiques d'origen jueu

Erdős Pál, Budapest 1913–Warsaw 1996



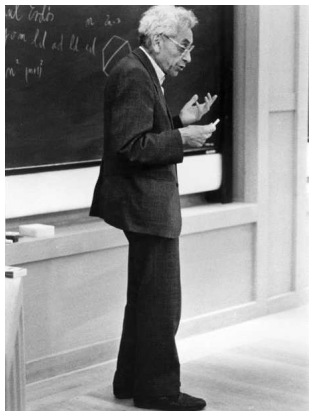
- Neix a Budapest el 26 de març de 1913, fill de professors de matemàtiques d'origen jueu
- Als 17 anys entra a estudiar matemàtiques a la universitat de Budapest. Obté un doctorat en matemàtiques als 21 anys, sota la direcció de Lipót Féjer

Erdős Pál, Budapest 1913–Warsaw 1996



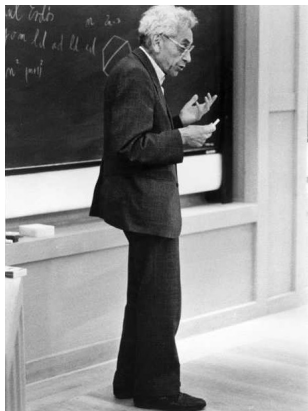
- Neix a Budapest el 26 de març de 1913, fill de professors de matemàtiques d'origen jueu
- Als 17 anys entra a estudiar matemàtiques a la universitat de Budapest. Obté un doctorat en matemàtiques als 21 anys, sota la direcció de Lipót Féjer
- Obté un postdoc a Manchester (1934-38), i a l'Institute of Advanced Studies a Princeton (1938-40)

Erdős Pál, Budapest 1913–Warsaw 1996



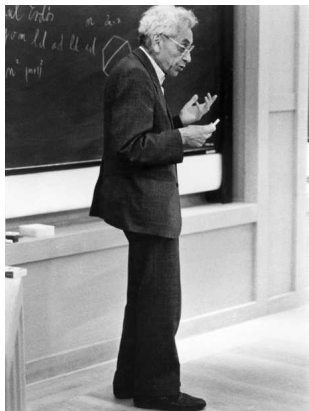
- Neix a Budapest el 26 de març de 1913, fill de professors de matemàtiques d'origen jueu
- Als 17 anys entra a estudiar matemàtiques a la universitat de Budapest. Obté un doctorat en matemàtiques als 21 anys, sota la direcció de Lipót Féjer
- Obté un postdoc a Manchester (1934-38), i a l'Institute of Advanced Studies a Princeton (1938-40)
- Inicia una vida itinerant sense domicili fix viatjant per tot el món i col·laborant amb més de 500 matemàtics. Fa estades llargues a Israel i als EUA.

Erdős Pál, Budapest 1913–Warsaw 1996



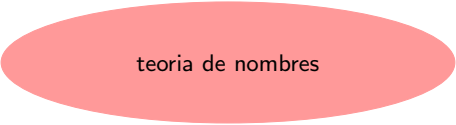
- Neix a Budapest el 26 de març de 1913, fill de professors de matemàtiques d'origen jueu
- Als 17 anys entra a estudiar matemàtiques a la universitat de Budapest. Obté un doctorat en matemàtiques als 21 anys, sota la direcció de Lipót Féjer
- Obté un postdoc a Manchester (1934-38), i a l'Institute of Advanced Studies a Princeton (1938-40)
- Inicia una vida itinerant sense domicili fix viatjant per tot el món i col·laborant amb més de 500 matemàtics. Fa estades llargues a Israel i als EUA.
- És reconegut amb 15 doctorats honoris causa, entre ells a Cambridge, Wisconsin o Praga, i guardonat amb el Wolf Prize (1983).

Erdős Pál, Budapest 1913–Warsaw 1996



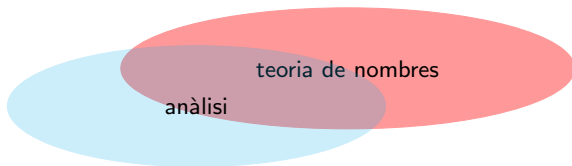
- Neix a Budapest el 26 de març de 1913, fill de professors de matemàtiques d'origen jueu
- Als 17 anys entra a estudiar matemàtiques a la universitat de Budapest. Obté un doctorat en matemàtiques als 21 anys, sota la direcció de Lipót Féjer
- Obté un postdoc a Manchester (1934-38), i a l'Institute of Advanced Studies a Princeton (1938-40)
- Inicia una vida itinerant sense domicili fix viatjant per tot el món i col·laborant amb més de 500 matemàtics. Fa estades llargues a Israel i als EUA.
- És reconegut amb 15 doctorats honoris causa, entre ells a Cambridge, Wisconsin o Praga, i guardonat amb el Wolf Prize (1983).
- Mor el 20 de setembre de 1996 en una conferència a Warsaw als 83 anys.

Les mathématiques de Paul Erdős

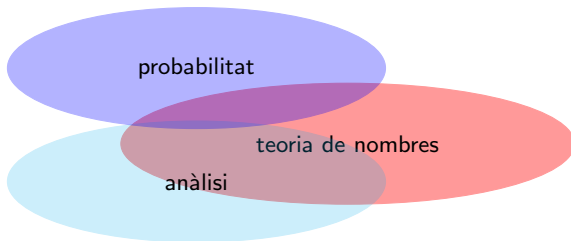


teoria de nombres

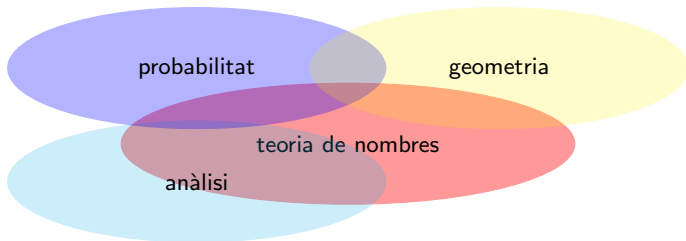
Les mathématiques de Paul Erdős



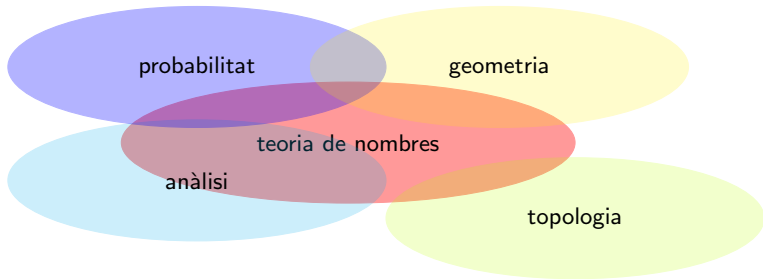
Les mathématiques de Paul Erdős



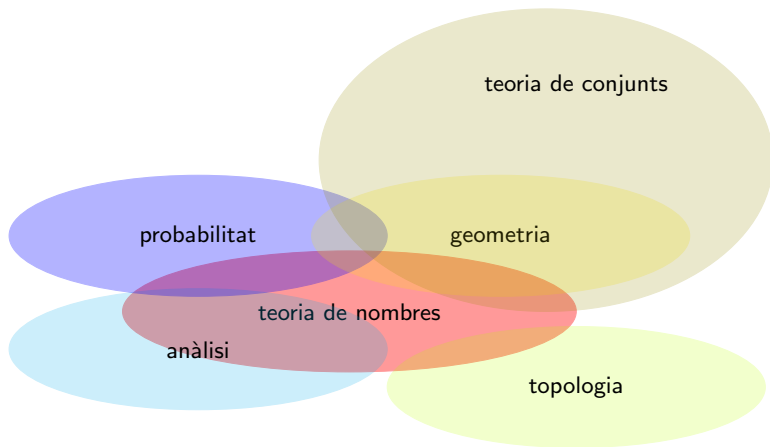
Les mathématiques de Paul Erdős



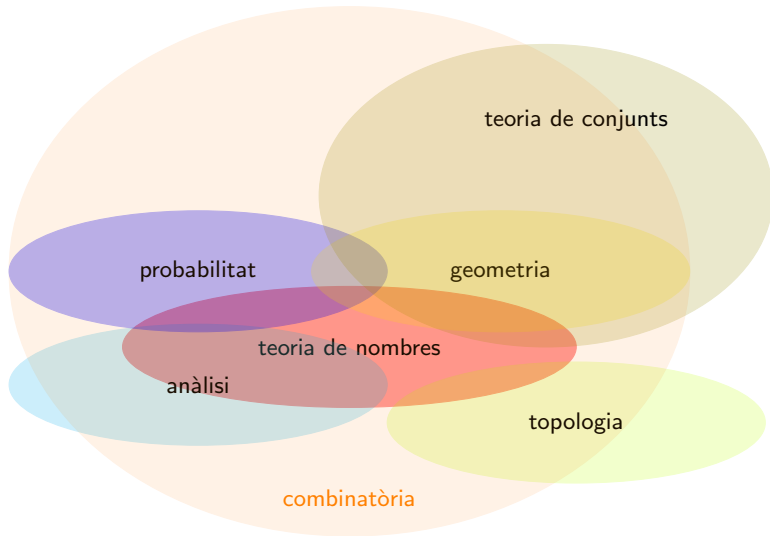
Les mathématiques de Paul Erdős



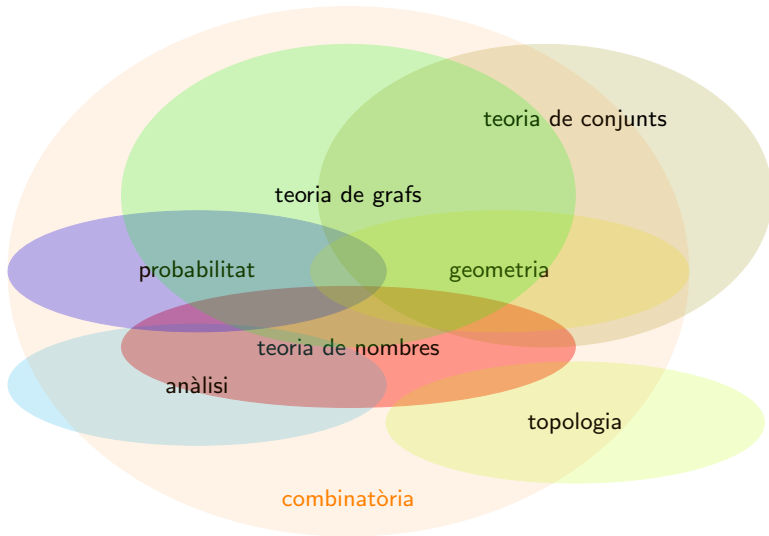
Les mathématiques de Paul Erdős



Les mathématiques de Paul Erdős



Les matemàtiques de Paul Erdős



Les matemàtiques de Paul Erdős: un estil propi

Hi ha dos grans estils de matemàtics segons la prioritat:

- Resoldre problemes
- Construir teories



Tim Gowers, The two cultures of mathematics

<https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf>

Les mathématiques de Paul Erdős: un estil propi

Hi ha dos grans estils de matemàtics segons la prioritat:

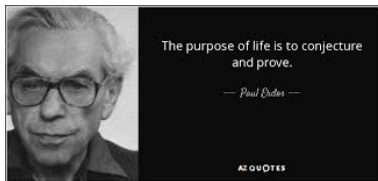
- Resoldre problemes (Paul Erdős)
- Construir teories (Michael Atiyah)



Tim Gowers, The two cultures of mathematics

<https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf>

Les mathématiques de Paul Erdős: un estil propi



<https://www.erdosproblems.com/all> (Thomas Bloom)

 Tags Forum More

Problem # Go Search all problems Go

All Random Solved Random Open

349 solved out of 985 shown (show only [solved](#) or [open](#))

OPEN - \$500

If $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ with $|A| = n$ is such that the subset sums $\sum_{a \in S} a$ are distinct for all $S \subseteq A$ then

$$N \gg 2^n.$$

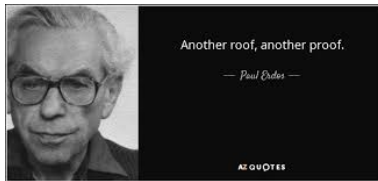
#1: [Er56][Er57][Er59][Er61][Er66b][Er69][Er70a][Er70b][Er73][BwEr74][Er8p74][Er75b][Er77c][ErG40][Er81][Er82a][Er85c][Er90][Er91][Er92b][Er95][Er97a][Er98]

number theory, additive combinatorics

Erdős called this 'perhaps my first serious problem' (in [Er98] he dates it to 1931). The powers of 2 show that 2^n would be best possible here. The trivial lower bound is $N \gg 2^n/n$, since all 2^n distinct subset sums must lie in $[0, Nn]$. Erdős and Moser [Er56] proved

$$N \geq \left(\frac{1}{4} - o(1)\right) \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

Les mathématiques de Paul Erdős: un estil propi



- Un dels autors més prolífics de la història: prop de 1500 articles
- Una de les xarxes més extenses de col·laboradors: més de 500 coautors.

https://users.renyi.hu/~p_erdos/Erdos.html (Rényi Institute)

1929:

- [1929-01](#) P. Erdős: On higher-order arithmetic series *Köz. Mat. Lapok* (1929) 187--189; (New)
-

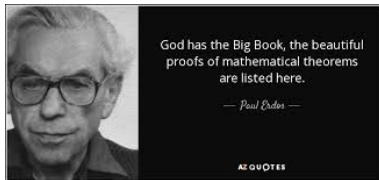
1932:

- [1932-01](#) P. Erdős: Beweis eines Satzes von Tschebyschef (in German), *Acta Litt. Sci. Szeged* **5** (1932), 194--198; *Zentralblatt* 4,101.
 - [1932-02](#) P. Erdős: Generalization of an elementary number-theoretic theorem of Kürschák, in Hungarian, *Mat. Fiz. Lapok* **39** (1932), 17--24; *Zentralblatt* 7,103.
-

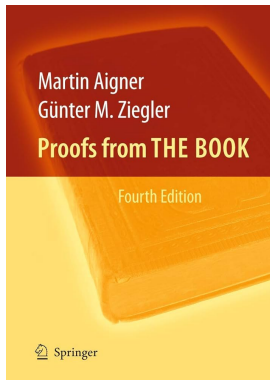
1934:

- [1934-01](#) P. Erdős: A theorem of Sylvester and Schur, *J. London Math. Soc.* **9** (1934), 282--288; *Zentralblatt* 10,103.
- [1934-02](#) P. Erdős: On primes in some arithmetic progressions (in Hungarian), *Doctoral thesis*, Sárospatak, 1934, 1--20.

Les matemàtiques de Paul Erdős: un estil propi



Elegància, Bellesa, Simplicitat, Profunditat, Imaginació, Creativitat

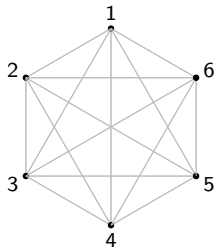


Algunes contribucions importants

- Teoria de Ramsey
- El mètode probabilístic
- Grafs aleatoris
- Teoria extremal

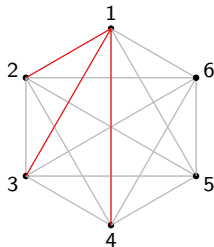
Teoria de Ramsey

En un grup de sis persones o més, n'hi ha tres que es coneixen mútuament o tres que no es coneixen entre elles



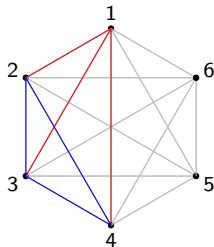
Teoria de Ramsey

En un grup de sis persones o més, n'hi ha tres que es coneixen mútuament o tres que no es coneixen entre elles



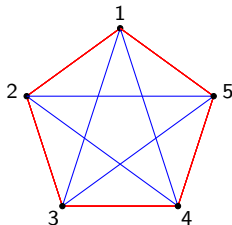
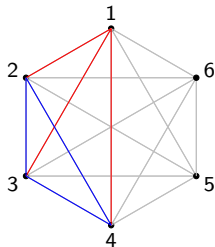
Teoria de Ramsey

En un grup de sis persones o més, n'hi ha tres que es coneixen mútuament o tres que no es coneixen entre elles



Teoria de Ramsey

En un grup de sis persones o més, n'hi ha tres que es coneixen mútuament o tres que no es coneixen entre elles



Teoria de Ramsey

En un grup de sis persones o més, n'hi ha tres que es coneixen mútuament o tres que no es coneixen entre elles

Theorem (Ramsey, Erdős–Szekeres)

Donats enters m i $k \leq m$, hi ha un nombre $R(m, k)$ amb la següent propietat. Si s'acoleixen tots els conjunts de mida k d'un conjunt de mida $n \geq R(m, k)$ amb un nombre finit de colors, hi ha un subconjunt de mida m tal que tots els subconjunts de m de mida k tenen el mateix color.

Per a $m = 3$ i $k = 2$, $R(m, k) = 6$.

Teoria de Ramsey

En un grup de sis persones o més, n'hi ha tres que es coneixen mútuament o tres que no es coneixen entre elles

Theorem (Ramsey, Erdős–Szekeres)

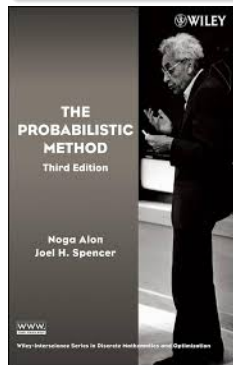
Donats enters m i $k \leq m$, hi ha un nombre $R(m, k)$ amb la següent propietat. Si s'acoleixen tots els conjunts de mida k d'un conjunt de mida $n \geq R(m, k)$ amb un nombre finit de colors, hi ha un subconjunt de mida m tal que tots els subconjunts de m de mida k tenen el mateix color.

- Per a cada enter m i $n \geq R(m, 4)$, qualsevol conjunt de n punts en el pla en conté m que estan en posició convexa.
- Per a cada enter m i n prou gran, qualsevol matriu $n \times n$ de 0's i 1's conté una submatriu $m \times m$ tota de zeros o tota d'uns.
- Per a cada enter m i n prou gran, qualsevol successió de nombres de llargada n conté una subsuccessió monòtona de llargada m .
- ...

El desordre total és impossible

El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.



El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.

Fita inferior dels nombres de Ramsey

Objectiu

Donat k , trobar un nombre $n(k)$ pel qual **existeix una coloració de les parelles de $[n]$ amb dos colors sense que hi hagi cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color**

- Acolorim cada parella de $[n]$ **vermella** o **blava** amb probabilitat $1/2$ i independents.

El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.

Fita inferior dels nombres de Ramsey

Objectiu

Donat k , trobar un nombre $n(k)$ pel qual **existeix una coloració de les parelles de $[n]$ amb dos colors sense que hi hagi cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color**

- Acolorim cada parella de $[n]$ **vermella** o **blava** amb probabilitat $1/2$ i independents.
- La probabilitat que un conjunt de mida k tingui totes les parelles del mateix color és

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}-1}.$$

El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.

Fita inferior dels nombres de Ramsey

Objectiu

Donat k , trobar un nombre $n(k)$ pel qual **existeix una coloració de les parelles de $[n]$ amb dos colors sense que hi hagi cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color**

- Acolorim cada parella de $[n]$ **vermella** o **blava** amb probabilitat $1/2$ i independents.
- La probabilitat que un conjunt de mida k tingui totes les parelles del mateix color és

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}-1}.$$

- La probabilitat que **algun** conjunt de mida k tingui totes les parelles del mateix color és com a molt

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}-1}.$$

El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.

Fita inferior dels nombres de Ramsey

Objectiu

Donat k , trobar un nombre $n(k)$ pel qual **existeix una coloració de les parelles de $[n]$ amb dos colors sense que hi hagi cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color**

- Si

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}-1} < 1,$$

aleshores la probabilitat que hi hagi una coloració sense cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color **és positiva**.

El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.

Fita inferior dels nombres de Ramsey

Objectiu

Donat k , trobar un nombre $n(k)$ pel qual **existeix una coloració de les parelles de $[n]$ amb dos colors sense que hi hagi cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color**

- Si

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}-1} < 1,$$

aleshores la probabilitat que hi hagi una coloració sense cap conjunt de mida k amb totes les parelles del mateix color **és positiva**.

- La desigualtat és satisfà si

$$n \leq 2^{k/2}$$

$$R(k, 2) \geq 2^{k/2}$$

El mètode probabilístic

Fites dels nombres de Ramsey

Erdős va plantejar 96 problemes sobre teoria de Ramsey, dels quals se n'han resolt 38. Era un dels seus temes preferits.

0 comments on this problem

OPEN - \$250

Find the value of $\lim_{k \rightarrow \infty} R(k)^{1/k}$.

#77: [Er61][Er69b][Er81][Er88][Er90b][Er95][Er97c][Er97d]

graph theory, ramsey theory

Erdős offered \$100 for just a proof of the existence of this constant, without determining its value. He also offered \$1000 for a proof that the limit does not exist, but says 'this is really a joke as [it] certainly exists'. Erdős proved

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} R(k)^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} R(k)^{1/k} \leq 4.$$

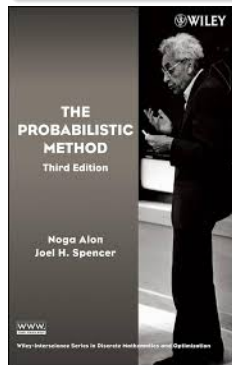
The upper bound has been improved to $4 - \frac{1}{128}$ by Campos, Griffiths, Morris, and Sahasrabudhe [CGMS23]. This was improved to 3.7992... by Gupta, Ndiaye, Norin, and Wei [GNNW24].

A shorter and simpler proof of an upper bound of the strength $4 - c$ for some constant $c > 0$ (and a generalisation to the case of more than two colours) was given by Balister, Bollobás, Campos, Griffiths, Hurley, Morris, Sahasrabudhe, and Tiba [BBCGHMST24].

This problem is #3 in Ramsey Theory in the graphs problem collection.

El mètode probabilístic

Provar l'existència d'un objecte definint un espai de probabilitat apropiat en el que la probabilitat de l'objecte és positiva.



Aplicacions a

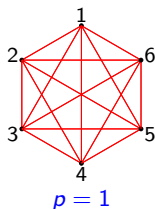
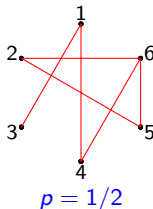
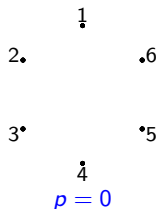
- teoria de nombres
- teoria de grafs
- teoria de conjunts
- combinatòria
- geometria
- ciències de la computació
- algorísmica
- . . .

Grafs aleatoris

- Quina és la probabilitat que un graf sigui Hamiltonià? (tingui un cicle que passa una única vegada per cada vèrtex)?
- Quina és la mida típica del subgraf complet més gran d'un graf?
- ...

Model d'Erdős-Rényi

El graf $G(n, p)$ és l'objecte aleatori que s'obé al triar independentment amb probabilitat p cada aresta entre dos vèrtexs de $[n]$.



Quina és la probabilitat que un graf tingui un triangle? Quants triangles té típicament un graf?

- La probabilitat que tres vèrtexs de $G(n, p)$ formin un triangle és p^3 .

Quina és la probabilitat que un graf tingui un triangle? Quants triangles té típicament un graf?

- La probabilitat que tres vèrtexs de $G(n, p)$ formin un triangle és p^3 .
- El nombre esperat de triangles en un graf aleatori $G(n, p)$ és $\sim n^3 p^3$.

Quina és la probabilitat que un graf tingui un triangle? Quants triangles té típicament un graf?

- La probabilitat que tres vèrtexs de $G(n, p)$ formin un triangle és p^3 .
- El nombre esperat de triangles en un graf aleatori $G(n, p)$ és $\sim n^3 p^3$.
- **Efecte llindar:**

Si $p \ll 1/n$ el graf $G(n, p)$ gairebé segur que no té triangles.

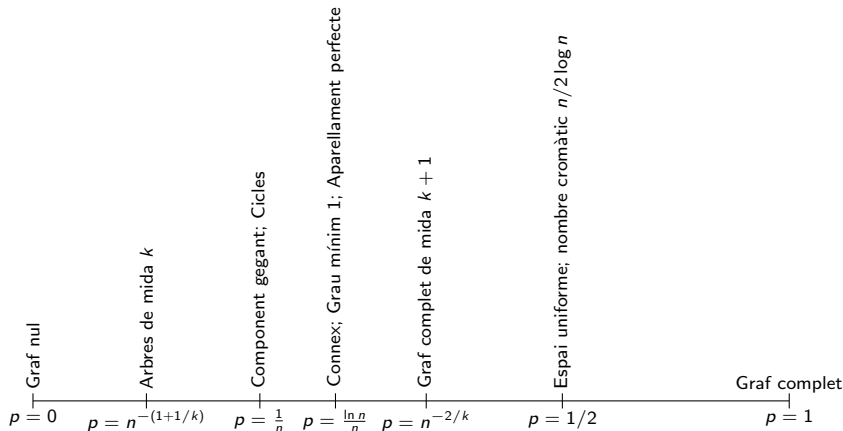
Si $p \gg 1/n$ el graf $G(n, p)$ gairebé segur que té triangles.

Quina és la probabilitat que un graf tingui un triangle? Quants triangles té típicament un graf?

- La probabilitat que tres vèrtexs de $G(n, p)$ formin un triangle és p^3 .
- El nombre esperat de triangles en un graf aleatori $G(n, p)$ és $\sim n^3 p^3$.
- **Efecte llindar:**
 - Si $p \ll 1/n$ el graf $G(n, p)$ gairebé segur que no té triangles.
 - Si $p \gg 1/n$ el graf $G(n, p)$ gairebé segur que té triangles.
- Gairebé tots els grafs tenen $n^3/64$ triangles (del total de $n^3/6$ possibles)

Grafs aleatoris: evolució de grafs aleatoris

Evolució de les propietats d'un graf $G(n, p)$ amb $p = p(n)$ com a funció de n



<https://www.networkpages.nl/CustomMedia/Animations/RandomGraph/ERRG/AddoneEdgepATime.html>

Quin és màxim nombre d'arestes d'un graf amb n vèrtexs sense triangles?

- Un graf amb més de n arestes gairebé segur que té triangles.
- El graf complet bipartit $K_{n/2, n/2}$ no té triangles i té $n^2/4$ arestes.

Quin és màxim nombre d'arestes d'un graf amb n vèrtexs sense triangles?

- Un graf amb més de n arestes gairebé segur que té triangles.
- El graf complet bipartit $K_{n/2, n/2}$ no té triangles i té $n^2/4$ arestes.

Theorem (Mantel)

Un graf amb més de $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestes conté triangles. L'únic graf extremal amb $\lfloor n^2/4 \rfloor$ és el graf complet bipartit $K_{n/2, n/2}$ (o $K_{(n-1)/2, (n+1)/2}$ si n és senar).

Teoria extremal

Quin és màxim nombre d'arestes d'un graf amb n vèrtexs sense cap còpia d'un subgraf H donat?

- Un graf amb més de $n^{2-2/m}$ arestes gairebé segur que conté una còpia del graf complet K_m .
- El graf complet multipartit amb $m - 1$ parts quasi iguals no conté cap còpia de K_m i té $(1 - 1/m)^2 n^2 / 2$ arestes.

Teoria extremal

Quin és màxim nombre d'arestes d'un graf amb n vèrtexs sense cap còpia d'un subgraf H donat?

- Un graf amb més de $n^{2-2/m}$ arestes gairebé segur que conté una còpia del graf complet K_m .
- El graf complet multipartit amb $m - 1$ parts quasi iguals no conté cap còpia de K_m i té $(1 - 1/m)^2 n^2 / 2$ arestes.

Theorem (Erdős–Stone–Simonovits)

El nombre màxim d'arestes d'un graf amb n vèrtexs que no conté cap còpia d'un graf donat H és

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \frac{n^2}{2},$$

on $\chi(H)$ és el nombre cromàtic de H .

La fita és asimptòticament justa si $\chi(H) \geq 3$.

El nombre cromàtic d'un graf és el mínim nombre de parts d'una partició en conjunts sense arestes.

Epíleg: Ilegat d'Erdős



Endre Szemerédi, Premi Abel 2012



Laszlo Lovász, Premi Abel, 2021

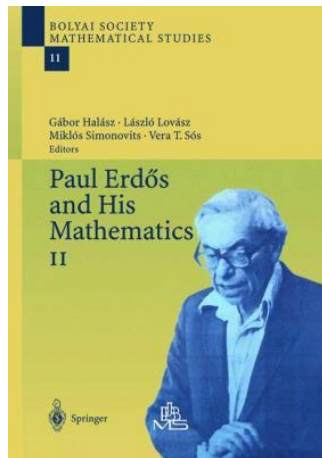
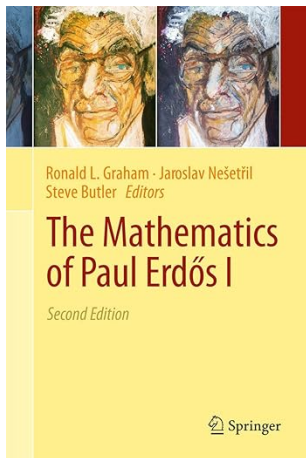


Noga Alon, Premi Shaw, 2022

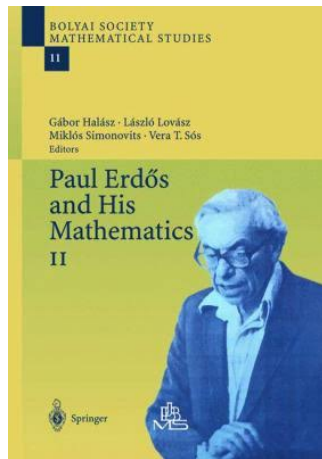
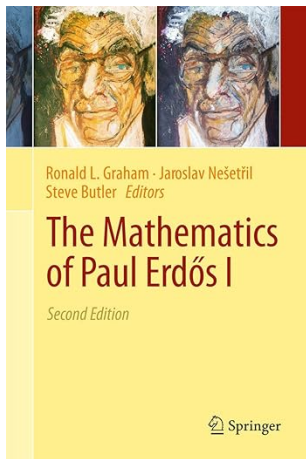


Terry Tao, Medalla Fields, 2006

Epíleg: Ilegat d'Erdős



Epíleg: llegat d'Erdős



Gràcies!