Solucions als problemes de la primera fase a Balears
de la 57a edició de l'Olimpíada Matemàtica Espanyola.
15 de gener de 2021.

PROBLEMA 1.
Trobau totes les solucions en nombres enters de l'equació

$$x^2 + y^2 = 3x - y.$$

SOLUCIÓ.
Escrivim l'equació donada en la forma

$$x^2 - 3x + y^2 + y = 0.$$

Multiplicant per 4 i sumant 10 a cada costat, es té

$$(2x-3)^2 + (2y+1)^2 = 10.$$

Com que x, y han de ser enters, també ho han de ser $2x-3$, $2y+1$ i aquests podran prendre tants valors com possibles descomposicions en suma de dos quadrats perfectes del nombre 10. Com que $10 = (-1)^2 + (-3)^2 = (-1)^2 + 3^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1^2 + 3^2$, les solucions enteres estaran entre les dels sistemes

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & -1 \\ 2y & + & 1 & = & -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & -3 \\ 2y & + & 1 & = & -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & -1 \\ 2y & + & 1 & = & 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & 3 \\ 2y & + & 1 & = & -1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & 1 \\ 2y & + & 1 & = & -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & -3 \\ 2y & + & 1 & = & 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & 1 \\ 2y & + & 1 & = & 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3 & = & 3 \\ 2y & + & 1 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Aquestes són respectivament

$$(x, y) = (1, -2), (0, -1), (1, 1), (3, -1), (2, -2), (0, 0), (2, 1), (3, 0),$$

i com que totes són enteres, totes són solucions del problema.

Per tant, les úniques solucions en nombres enters de l'equació proposada a l'enunciat són les que acabam de trobar.

Problema 2.

Trobau les funcions f, definides en els nombres reals i a valors reals, que satisfan l'equació funcional

$$f(x) + f(y+1) + f(z+2) = x + y + z + 12, \qquad (*)$$

per a tots els x, y, z reals.

Primera solució. Fent $y = x - 1$, $z = x - 2$ en $(*)$ resulta

$$3f(x) = 3x + 9.$$

D'aquí aïllem $f(x)$,

$$f(x) = x + 3.$$

Però hem de comprovar si realment aquesta funció és solució per a qualssevol x, y, z:

$$f(x) + f(y+1) + f(z+2) = (x+3) + ((y+1)+3) + ((z+2)+3) = x + y + z + 12.$$

Així s'ha resolt totalment el problema.

Segona solució. Fent la substitució $y = -1$, $z = -2$ en $(*)$, on deixarem la variable x arbitrària, tindrem

$$f(x) + 2f(0) = x + 9. \qquad (1)$$

Fent aquí $x = 0$, podem aïllar $f(0)$ i ens queda

$$f(0) = 3.$$

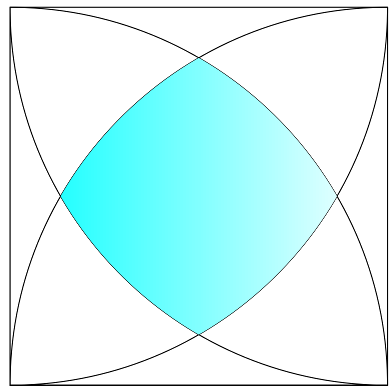
Substituint a (1) ens queda

$$f(x) = x + 3.$$

És immediat verificar que $x + 3$ satisfà l'equació $(*)$.

Problema 3. Amb centre en els quatre vèrtexs d'un quadrat i radi igual al costat del quadrat es tracen en ell quatre quadrants de circumferència.

Calculau l'àrea de la regió tancada que així es forma (part de la figura que apareix en color).



Primera solució. Suposem el quadrat de costat unitat i indiquem per x, y, z (Figura 1) les àrees d'algunes regions.

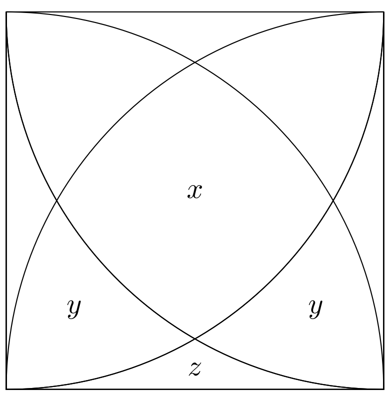


Figura 1

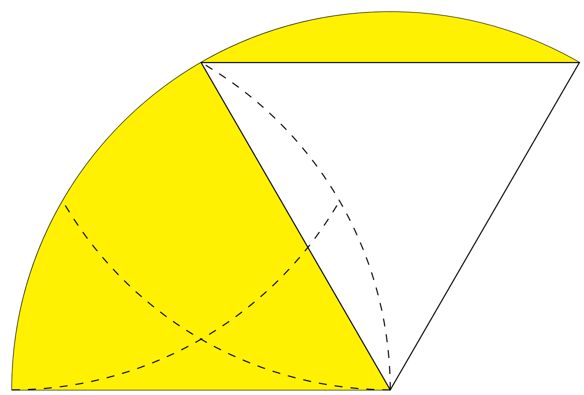


Figura 2

Es compleix:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & \frac{\pi}{4} \\ x & + & 2y & + & z & = & \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{array}$$

on la figura 2 explica el planteig de la tercera equació.

Restem-hi a la primera d'aquestes equacions la segona multiplicada per 4 i sumem-hi la tercera multiplicada també per 4. Tindrem:

$$x + 4y + 4z - 4\,(x + 3y + 2z) + 4\,(x + 2y + z) = 1 - \pi + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

És a dir:

$$x = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

De passada, ja que som aquí, esmentem que

$$y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}, \qquad z = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

En el cas general, si el costat del quadrat és a, l'àrea volguda és

$$a^2 \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Segona solució. La regió tancada l'àrea de la qual es demana consta (Figura 3) del quadrat (demostrau-ho!) $MNPQ$, el costat del qual és igual al del dodecàgon regular inscrit en la circumferència de radi unitat, més quatre segments circulars de la mateixa circumferència de 30° (Figura 4).

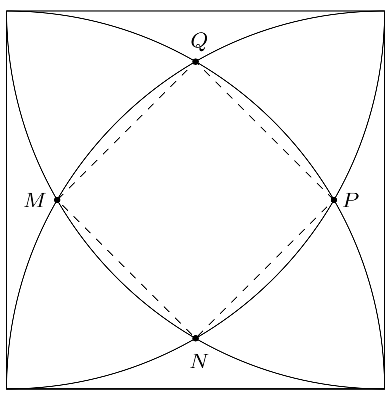


Figura 3

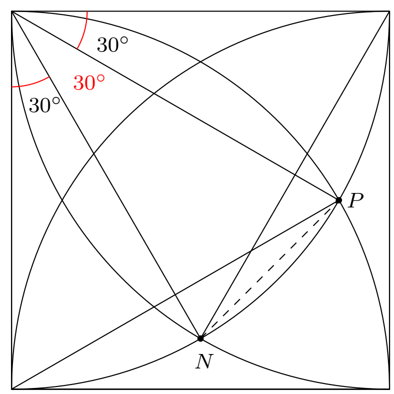


Figura 4

Sigui a la longitud del costat del quadrat.
Es té:

$$\begin{aligned} \text{Àrea del quadrat } MNPQ &= \left(a\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 &= a^2\left(2-\sqrt{3}\right). \\ \text{Àrea dels quatre segments circulars} &= 4\left(\tfrac{1}{12}\pi a^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right) &= a^2\left(\tfrac{\pi}{3}-1\right). \end{aligned}$$

La suma

$$a^2\left(2-\sqrt{3}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right),$$

això és,

$$a^2\left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

dóna l'àrea volguda.

Tercera solució.

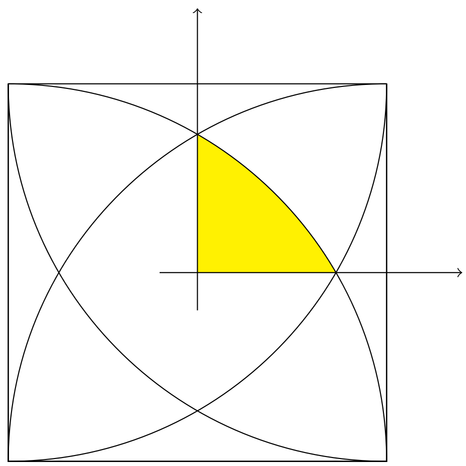


Figura 5

Suposem el quadrat de costat unitat i prenem com a eixos de coordenades les mediatrius dels seus costats . Llavors l'equació del quadrant de circumferència que talla el semieixos positius és

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-4x^2 - 4x + 3}}{2}$$

i l'àrea de la regió limitada per aquests semieixos i l'esmentat quadrant (Figura 5) és

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{-4x^2-4x+3}}{2}\right) \mathrm{d}x \\ = \quad & \left[\tfrac{1}{2} \arcsin \tfrac{2x+1}{2} + \tfrac{(2x+1)\sqrt{-4x^2-4x+3}}{8} - \tfrac{x}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \\ = \quad & \tfrac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3} + \tfrac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Per tant, en el cas general, si el costat del quadrat és a, l'àrea volguda és

$$4a^2 \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Problema 4.

Demostrau que si x, y són nombres reals positius tals que

$$x \geq \frac{1}{4} + xy, \qquad y \geq \frac{1}{4} + xy,$$

necessàriament ha de ser $x = y$.

Solució.

Per hipòtesi, existeixen nombres reals no negatius α i β tals que

$$x = \frac{1}{4} + xy + \alpha, \qquad y = \frac{1}{4} + xy + \beta. \tag{2}$$

Multiplicant les dues igualtats obtenim que

$$xy = \left(\frac{1}{4} + xy\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + xy\right)(\alpha + \beta) + \alpha\beta.$$

Aquesta igualtat, restant-hi xy als dos membres, esdevé

$$0 = \left(\frac{1}{4} - xy\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + xy\right)(\alpha + \beta) + \alpha\beta,$$

on cada un dels tres sumands del membre de la dreta és òbviament no negatiu. Com que la seva suma és nul·la, cada un d'ells necessàriament ha de ser nul.

És a dir:

$$\frac{1}{4} - xy = 0, \qquad \left(\frac{1}{4} + xy\right)(\alpha + \beta) = 0, \qquad \alpha\beta = 0,$$

d'on deduïm que

$$xy = \frac{1}{4}, \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Substituint això a (2) s'obté

$$x = y \quad \left(= \frac{1}{2}\right),$$

tal com volíem.

Problema 5.
Quin és el nombre de

(i) quadrats (ii) rectangles

que conté una quadrícula de $n \times n$ caselles quadrades?
Considerau el mateix problema pel cas d'una quadrícula de $m \times n$ ($m \geq n$) caselles quadrades.

Solució.

1. Cas d'una quadrícula de $n \times n$ caselles quadrades.

   (i) El nombre de quadrats de dimensió $j \times j$ que conté una quadrícula $n \times n$ és $(n+1-j)^2$. Per tant, el nombre total de quadrats que es demana és igual a

   $$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^{n} (n+1-j)^2 \\ = \; & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ = \; & \tfrac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)\,. \end{aligned}$$

   (ii) El nombre de rectangles de dimensió $j \times k$ que conté una quadrícula de $n \times n$ caselles quadrades és $(n+1-j)\,(n+1-k)$. Per tant, el nombre total de rectangles que es demana és igual a

   $$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (n+1-j)\,(n+1-k) \\ = \; & \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} (n+1-j)\right) \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\right) \\ = \; & \left(n\,(n+1) - \textstyle\sum_{j=1}^{n} j\right) \left(n\,(n+1) - \textstyle\sum_{k=1}^{n} k\right) \\ = \; & \left(n\,(n+1) - \tfrac{n(n+1)}{2}\right) \left(n\,(n+1) - \tfrac{n(n+1)}{2}\right) \\ = \; & \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

   Alternativament, tenint en compte els costats de la quadrícula, disposam de $n+1$ segments horitzontals paral·lels entre si i altres $n+1$ verticals també paral·lels entre si.
   Cada rectangle de costats paral·lels al de la quadrícula quedarà determinat per dos d'aquells segments horitzontals i dos dels verticals. D'acord amb el principi multiplicatiu, el nombre de rectangles volgut és, doncs,

   $$\binom{n+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2} = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 .$$

2. Cas d'una quadrícula de $m \times n$ ($m \geq n$) caselles quadrades.

El nombre de quadrats de dimensió $j \times j$ que conté una quadrícula $m \times n$ ($m \geq n$) és $(m+1-j)\,(n+1-j)$.

Per tant, el nombre total de quadrats que es demana en aquest cas és igual a

$$\sum_{j=1}^{n}(m+1-j)(n+1-j)=\frac{n(n+1)(3m+1-n)}{6}$$

i el nombre de rectangles és

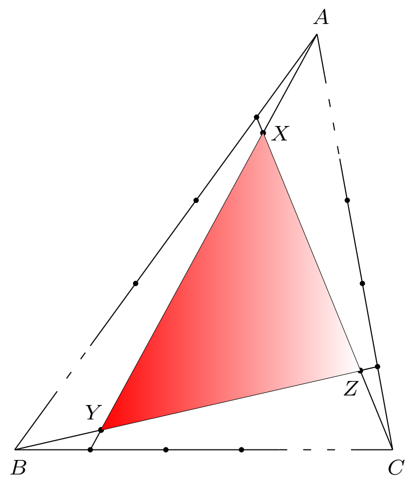
$$\binom{m+1}{2}\cdot\binom{n+1}{2}=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}.$$

Aquestes dues darreres fórmules, per a $m=n$, es redueixen a $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ i $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Problema 6.

Per a n natural més gran que 2, dividim cada un dels costats d'un triangle ABC en n parts iguals i traçam les rectes de la figura, que determinen un triangle XYZ.

Determinau l'àrea de $\triangle XYZ$ en funció de l'àrea de $\triangle ABC$.



Solució.

Sigui D el punt del costat AB de $\triangle ABC$ tal que $AD : AB = 1 : n$. Si E és el punt del costat CA tal que el segment DE és paral·lel a BC, aleshores els triangles ADE i ABC són semblants. En resulta que

$$DE : BC = EA : CA = AD : AB = 1 : n. \tag{3}$$

D'altra banda, sigui F el punt del costat CA tal que $CF : CA = 1 : n$. Tenint present (3), es té

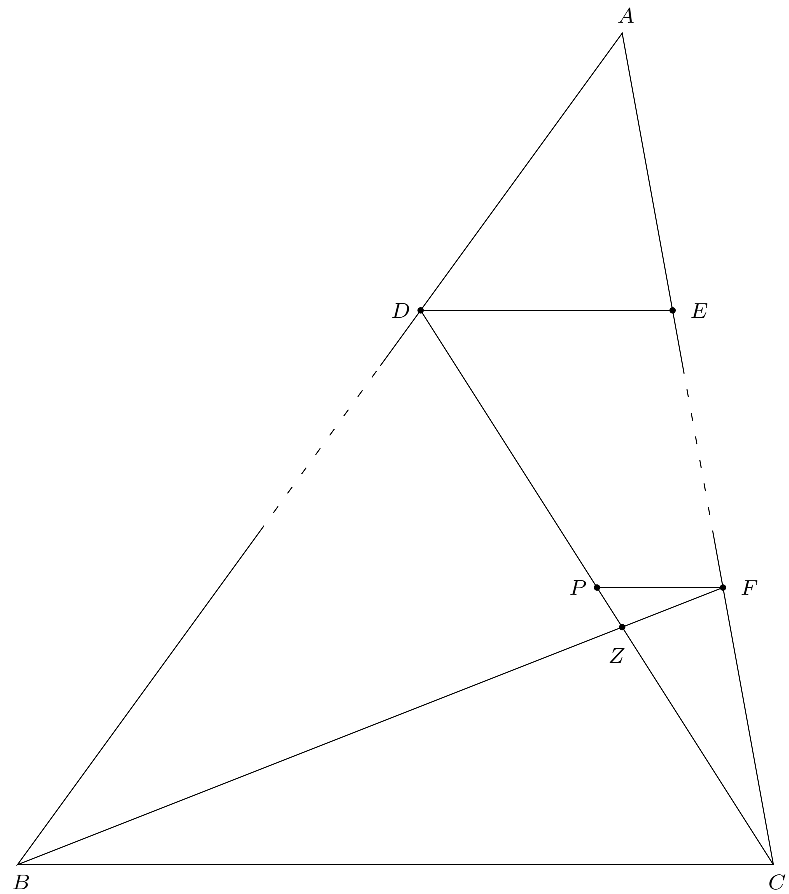
$$EA = CF. \tag{4}$$

Atès que els triangles CED i CFP són semblants, serà:

$$\frac{PF}{DE} = \frac{CF}{CE} = (\text{per } (4)) = \frac{EA}{CE} = \frac{EA}{CA - EA} = (\text{per } (3)) = \frac{1}{n-1}. \tag{5}$$

I atès que els triangles ZFP i ZBC també són semblants,

$$\begin{aligned} \tfrac{ZF}{BZ} &= \tfrac{PF}{BC} \\ &= \tfrac{PF}{DE} \cdot \tfrac{DE}{BC}. \end{aligned}$$



Tenint present (3) i (5), s'obté

$$\frac{ZF}{BZ} = \frac{1}{n\,(n-1)}$$

i, per tant,

$$\frac{[ZFC]}{[ZBC]} = \frac{1}{n\,(n-1)}. \tag{6}$$

Com que $[FBC] : [ABC] = CF : CA = 1 : n$ i, a més a més, és clar que l'àrea de $\triangle FBC$ és la suma de les àrees de $\triangle ZFC$ i $\triangle ZBC$, resulta:

$$[ZFC] + [ZBC] = \frac{1}{n}\,[ABC]\,.$$

D'aquesta igualtat i (6), se'n dedueix que

$$[ZBC] = \frac{n-1}{n^2-n+1}\,[ABC]\,.$$

Anàlogament,

$$[XCA] = [YAB] = \frac{n-1}{n^2-n+1}\,[ABC]\,.$$

En conseqüència,

$$[XYZ] = [ABC] - [XCA] - [YAB] - [ZBC] = \left(1 - \frac{3\,(n-1)}{n^2-n+1}\right)[ABC] = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}\,[ABC]\,.$$

.

És a dir:

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}. \tag{7}$$

Generalització. En un triangle ABC siguin D, E i F els punts sobre els costats AB, BC i CA, respectivament, tals que (Figura 1)

$$AD : DB = BE : EC = CF : FA = k, \qquad \text{on } 0 < k < 1.$$

Es compleix:

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{(1-k)^3}{1-k^3}.$$

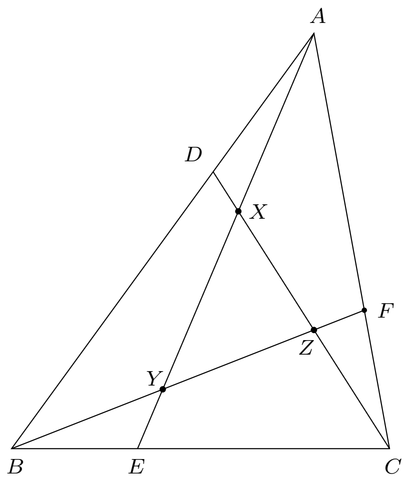


Figura 1

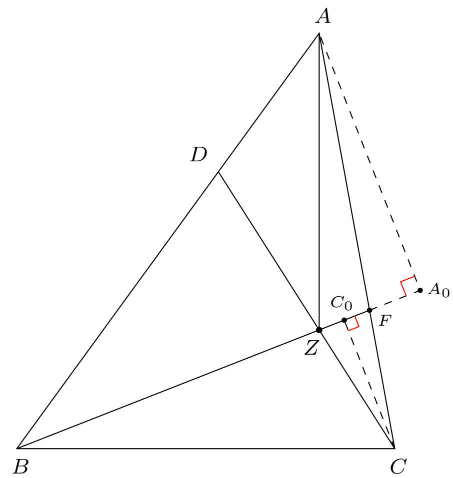


Figura 2

Prova. Comencem observant que els triangles ABZ i ZBC tenen la mateixa base BZ. Així, doncs, la relació entre les seves àrees és la mateixa que hi ha entre les corresponents altures d'aquests triangles. Designem per A_0 i C_0 els peus de les perpendiculars a BZ per A i C, respectivament. Tindrem, doncs (Figura 2):

$$\frac{[ZBC]}{[ABZ]} = \frac{CC_0}{AA_0} = \frac{CF}{FA} = k.$$

Al seu torn,

$$\frac{[ABZ]}{[DBZ]} = \frac{AB}{DB} = \frac{AD + DB}{DB} = \frac{AD}{DB} + 1 = k + 1.$$

Multiplicant aquestes expressions s'obté:

$$\frac{[ZBC]}{[DBZ]} = k\,(k+1)\,. \tag{8}$$

Com a conseqüència,

$$\frac{[DBC]}{[DBZ]} = \frac{[DBZ] + [ZBC]}{[DBZ]} = 1 + k\,(k+1) = 1 + k + k^2. \tag{9}$$

D'altra banda,

$$\frac{[DBC]}{[ABC]} = \frac{DB}{AB} = \frac{DB}{AD + DB} = \frac{1}{\frac{AD}{DB} + 1} = \frac{1}{k+1}. \tag{10}$$

Tenint present (8), (9) i (10), ens queda

$$\frac{[ZBC]}{[ABC]} = \frac{[ZBC]}{[DBZ]} \cdot \frac{[DBZ]}{[DBC]} \cdot \frac{[DBC]}{[ABC]} = k\,(k+1) \cdot \frac{1}{1+k+k^2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k}{1+k+k^2}.$$

Argumentant de manera similar tenim que

$$\frac{[XCA]}{[ABC]} = \frac{[YAB]}{[ABC]} = \frac{k}{1+k+k^2}.$$

Per tant,

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{[ABC]-[XCA]-[YAB]-[ZBC]}{[ABC]} = 1 - \frac{3k}{1+k+k^2} = \frac{(1-k)^2}{1+k+k^2},$$

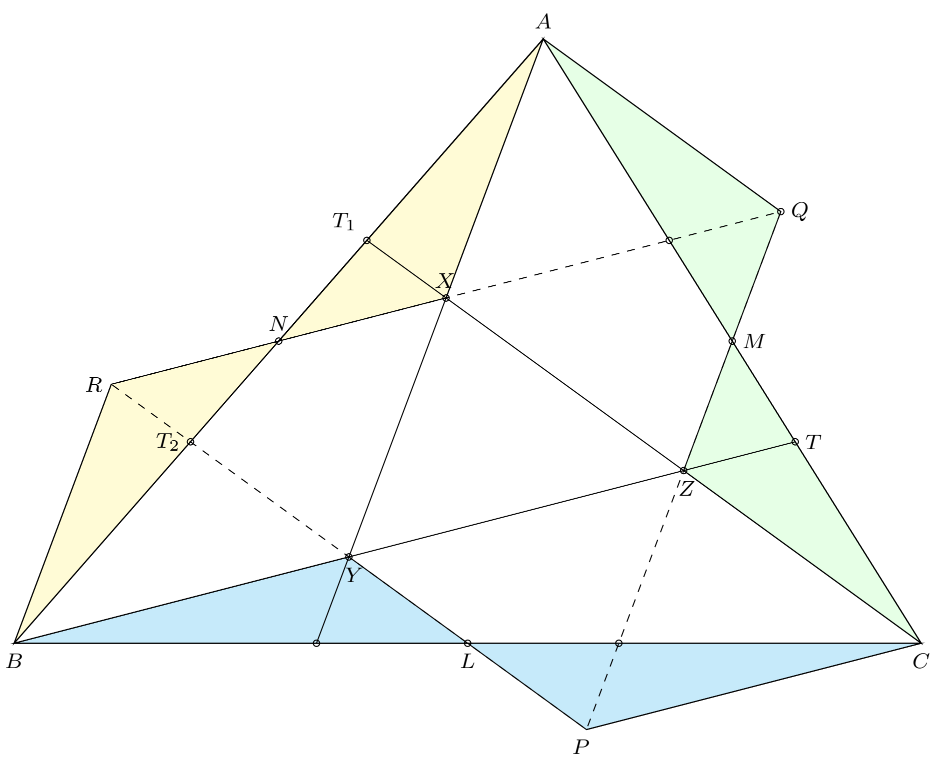
que hom pot escriure

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{(1-k)^3}{1-k^3}.$$

Substituint aquí k per $\frac{1}{n-1}$, s'obté (7).

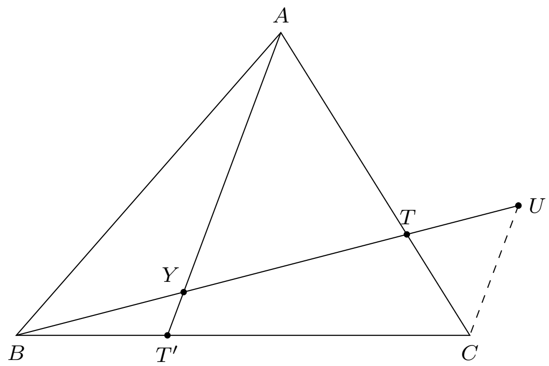
El cas particular $n = 3$. Siguin L, M, N els respectius punts mitjans dels costats BC, CA, AB. Designarem per P el punt simètric de Y respecte de L, per Q el punt simètric de Z respecte de M i per R el punt simètric de X respecte de N.

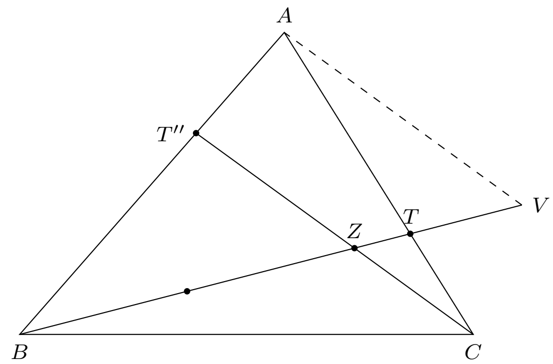
Posem T, T_1, T_2 per a denotar punts de trisecció dels costats de $\triangle ABC$.



Es té:

1. Els vèrtexs X, Y, Z de $\triangle XYZ$ són els respectius punts mitjans dels segments AY, BZ, CX.





Sigui U el punt sobre BT, a continuació de T, tal que CU és paral·lela a AT'. Llavors els triangles AYT i CUT són semblants. En resulta que

$$\frac{YT}{TU} = \frac{AT}{TC} = 2,$$

d'on deduïm que

$$\frac{YU}{YT} = \frac{3}{2}. \tag{11}$$

D'altra banda, del teorema de Thales se'n dedueix que

$$\frac{BY}{YU} = \frac{BT'}{T'C} = \frac{1}{2}.$$

Multiplicant aquesta igualtat amb (11), esdevé

$$\frac{BY}{YT} = \frac{3}{4}.$$

D'això se segueix que

$$\frac{BY}{BT} = \frac{3}{7}. \tag{12}$$

Sigui V el punt sobre BT, a continuació de T, tal que AV és paral·lela a CT''. Llavors els triangles VAT i ZCT són semblants. En resulta que

$$\frac{ZT}{TV} = \frac{TC}{TA} = \frac{1}{2},$$

d'on deduïm que

$$\frac{ZV}{ZT} = 3. \tag{13}$$

D'altra banda, del teorema de Thales se'n dedueix que

$$\frac{BZ}{ZV} = \frac{BT''}{T''A} = 2.$$

Multiplicant aquesta igualtat amb (13), esdevé

$$\frac{BZ}{ZT} = 6.$$

D'això se segueix que

$$\frac{BZ}{BT} = \frac{6}{7}.$$

El quocient de (12) i aquesta darrera dóna

$$\frac{BY}{BZ} = \frac{1}{2}.$$

és a dir, Y és el punt mitjà del segment BZ.

2. Els punts P, L, Y, T_2, R estan alineats i $PR \parallel CT_1$.

   Tenint en compte que el punt N biseca T_1T_2 i XR, el quadrilàter RT_2XT_1 és un paral·lelogram. Per tant, $RT_2 \parallel T_1X$.

   És a dir:

$$RT_2 \parallel CT_1. \tag{14}$$

   Del teorema de la paral·lela mitjana aplicat a $\triangle T_1BZ$, en el qual T_2 és el punt mitjà de BT_1, se'n dedueix que

$$T_2Y \parallel T_1Z$$

   i, aplicat a $\triangle ZBC$,

$$YL \parallel ZC$$

   o, equivalentment,

$$T_2Y \parallel CT_1 \qquad YL \parallel CT_1. \tag{15}$$

   Per (14) i (15), els punts R, T_2, Y, L estan alineats.

   Per tant, per definició del punt P, tenim

$$R, T_2, Y, L, P \text{ alineats}$$

   i

$$PR \parallel CX.$$

3. Com que $NX \| BY$ (pel teorema de la paral·lela mitjana aplicat a $\triangle ABY$), es compleix que $RX \| YZ$. D'altra banda, $BY \| PC$, ja que L biseca BC i PY i, per tant, el quadrilàter $BPCY$ és un paral·lelogram.

   En conseqüència, $RYZX$ és un paral·lelogram. Argumentant de manera similar tenim que també són paral·lelograms els quadrilàters $YPCZ$, $YPZX$, $ZQAX$, $BYXR$, $YZQX$.

4. Així, doncs, resulten set triangles l'àrea de cada un dels quals és la mateixa que l'àrea de $\triangle XYZ$ i la suma de totes elles coincideix amb la de $\triangle ABC$.

   Podem, doncs, concloure que l'àrea de $\triangle XYZ$ és $\frac{1}{7}$ de l'àrea de $\triangle ABC$.