LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 1. *En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha". Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.*

Solución. Vamos a numerar a las personas de izquierda a derecha según su posición en la fila como $p_1, p_2, \ldots, p_{2022}$. En primer lugar, probaremos que todos los p_i con $1 \leq i \leq 1011$ son mentirosos. En el caso de p_1, como no hay personas a su izquierda, sabemos que el enunciado no puede ser cierto, con lo que necesariamente p_1 ha de ser un mentiroso. Procederemos ahora por inducción, suponiendo probado que las k personas más a la izquierda son mentirosas, donde $1 < k < 1011$. Si p_{k+1} dijese la verdad, tendría k mentirosos a su izquierda y por tanto un máximo de $k-1$ personas que dicen la verdad a su derecha, con lo que hay estrictamente más de $2021-2k$ mentirosos a su derecha. Tomemos ahora el mentiroso más a la derecha. Este tendrá al menos $2021-2k+k = 2021-k$ mentirosos a su izquierda y a lo sumo $k-1$ que dicen la verdad a su derecha. Como es un mentiroso, ha de pasar que $2021-k \leq k-1$, lo cual implica que $k \geq 1011$, lo cual es una contradicción.
Vamos a probar ahora que las 1011 personas restantes dicen la verdad. Tomemos a un individuo cualquiera p_k, con $1012 \leq k \leq 2021$. Esta persona tendrá al menos a 1011 mentirosos a su izquierda, que siempre serán más que los que tenga a su derecha. Así que necesariamente deberá decir la verdad.
Por tanto, se concluye que 1011 personas mienten y 1011 dicen la verdad.

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que*

$$\text{área}(PAB)\cdot\text{área}(PCD) = \text{área}(PBC)\cdot\text{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Solución. Podemos reescribir la igualdad del enunciado como

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)}.$$

Sea E el punto donde AP corta a BD, y sea F el punto donde CP corta a BD. Dado que PAB y PBC tienen un lado común, se tiene que

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{altura de } B \text{ sobre } AP}{\text{altura de } D \text{ sobre } AP} = \frac{BE}{DE},$$

donde la segunda igualdad se cumple por semejanza de triángulos. Igualmente se cumple que

$$\frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)} = \frac{BF}{DF}.$$

Por lo tanto tenemos que $BE/DE = BF/DF$. Si desplazamos E desde B hasta D, el numerador de la fracción crece y el denominador decrece, por lo que la fracción es creciente. Deducimos así que $E = F$.
Si P está sobre AC, hemos acabado. Si no lo está, las rectas AP y CP son distintas, y se cortan como mucho en un punto. Dado que se cortan en P y en E, se deduce que $P = E$, y por tanto P está en BD, como queríamos demostrar.

Problema 3. *Hallar todas las ternas de números reales* (a, b, c) *que cumplan el sistema*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Solución. Denotamos $u = 2^a$, $v = 2^b$ y $w = 2^c$. La segunda ecuación del sistema puede escribirse como $u + v + w = 7$, y la tercera como $u^{-1} + v^{-1} = 3/4$. También podemos obtener una relación entre u, v y w de la primera ecuación:

$$uvw = 2^a 2^b 2^c = 2^{a+b+c} = 2^3 = 8.$$

En la tercera ecuación, sustituimos a partir de la primera y la segunda:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}.$$

Esta última igualdad se puede escribir como $w^2 - 7w + 6 = 0$, que tiene como soluciones $w = 6$ y $w = 1$. Consideramos ambos casos:

- Si $w = 6$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 4/3$ y $u + v = 1$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(1 - u) = 4/3$, o $u^2 - u + 4/3 = 0$, que no tiene solución real.

- Si $w = 1$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 8$ y $u + v = 6$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(6 - u) = 8$, o $u^2 - 6u + 8 = 0$, que tiene soluciones $u = 4$ y $u = 2$. Esto lleva a las posibles soluciones $(u, v, w) = (4, 2, 1)$ y $(u, v, w) = (2, 4, 1)$. Tomando logaritmos, se obtiene $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 2, 0)$. Se comprueba que ambas soluciones satisfacen el sistema inicial.

Problema 4. *Encontrar todos los polinomios* $p(x)$ *con coeficientes reales tales que*

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$

para cualesquiera números reales x, y, z.

Solución. Comenzamos observando que cuando $x = y = z = 0$ la ecuación dada se escribe como

$$4p(0) = 3p(0),$$

que automáticamente implica que $p(0) = 0$. Sustituimos ahora (x, y, z) por $(x, x, -x)$. Entonces,

$$3p(x) + p(-x) = p(2x). \tag{1}$$

Sea n el grado de p, y escribamos $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Entonces, el coeficiente con x^n en el lado izquierdo de (1) es $a_n \cdot (3 + (-1)^n)$, y en el lado derecho es $a_n \cdot 2^n$. Esto implica que

$$3 + (-1)^n = 2^n.$$

Si n es par, entonces $3 + 1 = 2^n$, que es cierto si $n = 2$. Si n es impar, tendremos que $n = 1$. Entonces, los únicos posibles candidatos con los polinomios de grado a lo sumo 2 y cuyo término constante es 0, esto es,

$$p(x) = ax^2 + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos ahora que estos polinomios cumplen las condiciones del enunciado. Como la condición es linear, es suficiente comprobar que tanto $p_1(x) = x$ como $p_2(x) = x^2$ funcionan. Esto se sigue de la comprobación

$$x + y + z + (x + y + z) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2zx + z^2 + x^2 + 2zx.$$

Por tanto, cualquier polinomio de la forma $p(x) = ax^2 + bx$, con $a, b \in \mathbb{R}$, satisfacen la condición dada, y estos son los únicos.