



59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Primera Sessió



Problema 1. Les arrels de l'equació $x^2 + ax + b = 0$ són x_1, x_2 i les de l'equació $bx^2 + bcx + 1 = 0$ són $x_1, \frac{1}{x_2}$, on a, b, c són nombres reals, i $b > 0$. Demostrar que $ac \geq 4$.

Problema 2. En una presó hi ha 30 convictes. Se'ls dóna una última possibilitat abans de matar-los: s'hauran de col·locar en fila índia i se'ls col·locarà a cadascú un barret, blanc o negre. Tothom veu de quin color tenen el barret tots els presoners de davant seu (així, l'últim veu el barret dels 29 que té al davant i el primer no veu res). Es preguntarà a cada pres de quin color és el seu barret (començant per l'últim pres, el que ho veu tot). El pres que encerti de quin color és el seu barret es salva, el que no, serà afusellat.

Abans que això es realitzi, els presos, que coneixen la prova a la qual seran sotmesos, però no el color del barret que se'ls posarà, poden parlar i pensar una estratègia de grup. Quina estratègia poden seguir els 30 presoners per tal de salvar-se'n el màxim nombre possible?

Problema 3. Les línies que bissequen els angles B i C del triangle ABC tallen amb els costats oposats en els punts D i E , respectivament. Si la línia DE talla amb la línia BC en el punt F , demostrar que AF és la bisectriu exterior de l'angle A .



59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió



Problema 4. Trobar totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)).$$

Problema 5. $2n$ estudiants (amb $n \geq 5$) participen en un torneig de tenis de taula, que té una durada de 4 dies. Cada dia, cada estudiant, juga un partit. En cada partit hi ha un guanyador i un perdedor (no hi ha empat possible). És possible que la mateixa parella d'estudiants s'enfrontin dues o més vegades, en dies diferents. Sabem que el torneig acaba de la forma següent:

- Hi ha un únic guanyador.
- Hi ha exactament 3 estudiants que acaben en segona posició.
- Cap estudiant ha perdut els 4 partits.

Quants estudiants van guanyar un sol partit i quants van guanyar exactament dos partits?

Problema 6. Siguin m i n enters positius. Siguin $a_1, \dots, a_m$ enters positius diferents dins el conjunt $\{1, \dots, n\}$ tals que per a qualsevol parell d'índexs i, j amb $1 \leq i \leq j \leq m$ i $a_i + a_j \leq n$, existeix un índex k tal que $a_i + a_j = a_k$. Provar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$



59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Primera Sessió



Problema 1. Les arrels de l'equació $x^2 + ax + b = 0$ són x_1, x_2 i les de l'equació $bx^2 + bcx + 1 = 0$ són $x_1, \frac{1}{x_2}$, on a, b, c són nombres reals, i $b > 0$. Demostrar que $ac \geq 4$.

Solució. Aplicant la fórmula del producte de les arrels d'una equació de segon grau a cada una de les equacions donades a l'enunciat, s'obté el sistema d'equacions en les incògnites x_1, x_2 següent

$$\begin{aligned}x_1 x_2 &= b \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{1}{b},\end{aligned}$$

les solucions del qual són

$$(x_1, x_2) = (1, b), (-1, -b).$$

Al seu torn, per la fórmula de la suma de les arrels d'una equació de segon grau, aplicada a cada una de les de l'enunciat, tindrem

$$1 + b = -a \quad \text{i} \quad 1 + \frac{1}{b} = -c$$

o bé

$$-1 - b = -a \quad \text{i} \quad -1 - \frac{1}{b} = -c,$$

que podem escriure d'una manera més compacta com

$$a = \pm(1 + b) \quad \text{i} \quad c = \pm\left(1 + \frac{1}{b}\right),$$

on els signes es corresponen, i d'on deduïm

$$ac = (1 + b) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = b + \frac{1}{b} + 2 \geq 4,$$

com es volia, atès que, essent $b > 0$, es compleix que $b + \frac{1}{b} = \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + 2 \geq 2$ i, a més, la igualtat es compleix només quan $\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}} = 0$, és a dir, només quan $b = 1$.

Problema 2. En una presó hi ha 30 convictes. Se'ls dona una última possibilitat abans de matar-los: s'hauran de col·locar en fila índia i se'ls col·locarà a cadascú un barret, blanc o negre. Tothom veu de quin color tenen el barret tots els presoners de davant seu (així, l'últim veu el barret dels 29 que té al davant i el primer no veu res). Es preguntarà a cada pres de quin color és el seu barret

(començant per l'últim pres, el que ho veu tot). El pres que encerti de quin color és el seu barret es salva, el que no, serà afusellat.

Abans de que això es realitzi, els presos, que coneixen la prova a la qual seran sotmesos però, no el color del barret que se'ls posarà, poden parlar i pensar una estratègia de grup. Quina estratègia poden seguir els 30 presoners per tal de salvar-se'n el màxim nombre possible?

Solució. Assignem el nombre 0 al color blanc i l'1 al negre. Notem que cada presoner té la informació que li han transmès els que han parlat abans que ell, i a més la informació dels colors dels barrets que veu. Una de les possibles estratègies que permetrà salvar almenys a 29 dels 30 presoners és la que es descriu a continuació.

El primer a parlar (el presoner 30) diu el color corresponent a la suma (dins $\mathbb{Z}_2$, és a dir $1 + 1 = 0$) dels colors dels 29 presoners de davant. Ara, el presoner 29 pot sumar els colors dels barrets de davant seu i, restant-ho (que en aquest cas és el mateix que sumar-ho) del que havia dit el presoner 30, pot deduir quin és el seu color, dir-lo i salvar-se. El presoner 28 ha sentit quant sumen els dels 29 primers presoners i, el color del presoner 29, i per tant pot deduir-ne la suma dels 28 primers. A partir d'això, sumant els colors dels barrets dels 27 presoners que veu, pot conèixer quin és el seu color, i salvar-se. Així, successivament, es salven tots els presoners des del 29 fins l'1. L'únic que ha de fer el presoner i -èssim ($1 \leq i \leq 29$) és restar, del que ha dit el presoner 30 (la suma dels 29 primers), el que ha dit cada un dels altres presoners que ja han parlat (el seu respectiu color), i també la suma dels colors dels barrets que ell veu davant seu. El que s'obtingui és el color del seu barret.

Clarament, aquesta estratègia és la millor possible. Naturalment, no hi ha cap forma de garantir que el presoner 30 es salvi, ja que no pot deduir cap informació sobre el color del seu barret.

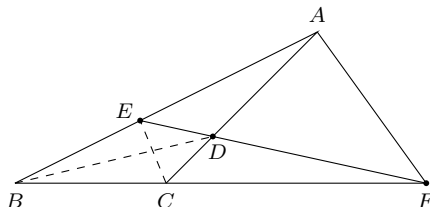
Problema 3. Les línies que bissequen els angles B i C del triangle ABC tallen amb els costats oposats en els punts D i E , respectivament. Si la línia DE talla amb la línia BC en el punt F , demostrar que AF és la bisectriu exterior de l'angle A .

Solució A. Apliquem el teorema de Menelau a $\triangle ABC$ i transversal FDE . Tindrem:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$$

Com que $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{BC}$ i $\frac{CD}{DA} = \frac{BC}{AB}$ (pel teorema de la bisectriu interior), resulta

$$\frac{CA}{BC} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$



És a dir:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CA}.$$

Així, doncs, el punt F , que divideix el costat BC de $\triangle ABC$ en dos segments substractius proporcionals als altres costats del triangle, fa AF bisectriu exterior de l'angle A , pel recíproc del teorema de la bisectriu d'un angle exterior d'un triangle.

Solució B.

Sigui $\{P\} = BD \cap AF$ i apliquem el teorema de Ceva al triangle ABF . Tindrem:

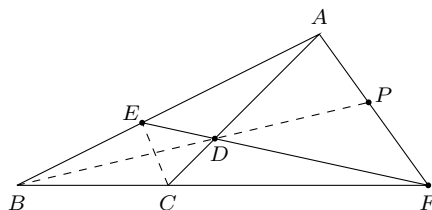
$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{FP}{PA} = 1.$$

Atès que CE és bisectriu en $\triangle ABC$,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{BC}.$$

I atès que BP és bisectriu en $\triangle ABF$, serà

$$\frac{FP}{PA} = \frac{BF}{AB}.$$



Per tant,

$$\frac{CA}{BC} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{BF}{AB} = 1.$$

És a dir:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CA},$$

i acabam el raonament com a la solució anterior.

Solució C.

(Per els que no estan familiaritzats amb el teorema de la bisectriu d'un angle exterior d'un triangle)

Partim de la relació

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CA}, \tag{1}$$

[illegible]
$$\frac{AQ}{CF} = \frac{AB}{BC}.$$
$$\frac{FQ}{BF} = \frac{CA}{BC}.$$
$$\frac{AQ}{FQ} = \frac{AB \cdot CF}{CA \cdot BF} = \frac{\frac{AB}{CA}}{\frac{BF}{CF}} = (\text{per (1)}) = 1$$
$$AQ = FQ.$$
$$\begin{aligned}\angle QAF &= \angle AFQ \\ &= \angle CAF \quad (\text{per alterns interns})\end{aligned}$$

4



59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió



Problema 4. Trobar totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)).$$

Solució. Prenent $x = y = 0$ s'obté $f(0) + f(0) = 0$. Per tant $f(0) = 0$.

Prenent $y = 0$, atès que $f(0) = 0$, s'obté $f(x^3) = xf(x^2)$. Ara, substituint en l'equació de l'enunciat, obtenim

$$xf(x^2) + yf(y^2) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)),$$

i per tant,

$$xf(y^2) + yf(x^2) = (x + y)f(xy).$$

Sigui ara $z \in \mathbb{R}$ arbitrari. Si prenem $x = \sqrt[3]{z}$ i $y = -\sqrt[3]{z}$, com $x + y = 0$, de nou substituint en l'equació de l'enunciat, obtenim

$$f(-z) = -f(z).$$

Ara, si prenem $y = 1$, obtenim $xf(1) + f(x^2) = (1 + x)f(x)$. I si prenem $y = -1$, obtenim $xf(1) - f(x^2) = (1 - x)f(x)$. Sumant ambdues equacions tenim

$$f(x) = xf(1).$$

Diguem c a la constant $f(1)$. És senzill verificar (substituint en l'equació de l'enunciat) que per a tota $c \in \mathbb{R}$, la funció $f(x) = cx$ és solució de l'equació.

Problema 5. $2n$ estudiants (amb $n \geq 5$) participen en un torneig de tennis de taula, que té una durada de 4 dies. Cada dia, cada estudiant, juga un partit. En cada partit hi ha un guanyador i un perdedor (no hi ha empat possible). És possible que la mateixa parella d'estudiants s'enfrontin dues o més vegades, en dies diferents. Sabem que el torneig acaba de la forma següent:

- Hi ha un únic guanyador.
- Hi ha exactament 3 estudiants que acaben en segona posició.
- Cap estudiant ha perdut els 4 partits.

Quants estudiants van guanyar un sol partit y quants van guanyar exactament dos partits?

Solució. Cada dia es disputen exactament n partits. Per tant, al final del torneig, s'han disputat $4n$ partits.

Diguem N_i el conjunt format pels estudiants que han guanyat i partits amb $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, i sigui $n_i = |N_i|$. Per la tercera condició de l'enunciat, $n_0 = 0$. Per tant, ha de ser

$$4n_4 + 3n_3 + 2n_2 + n_1 = 4n.$$

A més, com $2n$ és el nombre total d'estudiants, es té que

$$n_4 + n_3 + n_2 + n_1 = 2n.$$

Diguem g a l'estudiant guanyador i s_1, s_2, s_3 als tres estudiants que acaben en segona posició. És senzill veure que només pot ser o bé $N_4 = \{g\}$, o bé $N_3 = \{g\}$ (i $N_4 = \emptyset$).

Suposem que $N_4 = \{g\}$ (o dit altrament $n_4 = 1$). Vegem que no pot ser

- $N_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ (i per tant $n_3 = n_2 = 0$ i $n_1 = 3$). En tal cas, $1 + 3 = 2n$, però $n \geq 5$.
- $N_2 = \{s_1, s_2, s_3\}$ (i per tant $n_3 = 0$, $n_2 = 3$ i $n_1 = 2n - 4$). En tal cas, $4 + 2 \cdot 3 + (2n - 4) = 4n$ i, per tant, $n = 3$ (però $n \geq 5$).

De forma similar es pot veure que no pot ser $N_3 = \{g\}$; és a dir, no pot ser $n_4 = 0$ i $n_3 = 1$.

Per tant, ha de ser $N_4 = \{g\}$ ($n_4 = 1$), i $N_3 = \{s_1, s_2, s_3\}$ ($n_3 = 3$). Amb tal condicions, $n_1 = 2n - n_2 - 4$ i es té

$$4 + 3 \cdot 3 + 2n_2 + (2n - n_2 - 4) = 4n,$$

d'on s'obté $n_2 = 2n - 9$. En conclusió, $2n - 9$ estudiants van guanyar exactament 2 partits i $n_1 = 2n - (2n - 9) - 4 = 5$ estudiants van guanyar exactament 1 partit.

Problema 6. Siguin m i n enters positius. Siguin $a_1, \dots, a_m$ enters positius diferents dins el conjunt $\{1, \dots, n\}$ tals que per a qualssevol parell d'índexos i, j amb $1 \leq i \leq j \leq m$ i $a_i + a_j \leq n$, existeix un índex k tal que $a_i + a_j = a_k$. Provar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Solució. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $a_1 < a_2 < \dots < a_m$.

Provem que per a tot j amb $1 \leq j \leq m$ es té $a_j + a_{m-j+1} \geq n+1$.

Per reducció a l'absurd. Sigui j amb $1 \leq j \leq m$ tal que $a_j + a_{m-j+1} \leq n$. Llavors per a cada i amb $1 \leq i \leq j$, com $a_i < a_j$, es té $a_i + a_{m-j+1} \leq n$. Per l'enunciat, per cada i , tindrem a_{k_i} tal que $a_i + a_{m-j+1} = a_{k_i}$. Com $a_i > 0$, tenim $m - j + 1 < k_i \leq m$. Notem que, per tant, cada k_i pot prendre $m - (m - j + 1) = j - 1$ valors diferents. Però, tots els a_{k_i} 's, i per consegüent tots els k_i 's, són diferents, per ser-ho els a_i 's. Com tenim exactament j d'aquests valors (recordem que $1 \leq i \leq j$) arribem a un absurd.

Ara doncs, sumant aquestes desigualtats per a tot j es té

$$\sum_{j=1}^m (a_j + a_{m-j+1}) \geq m \cdot (n+1).$$

Però notem que

$$\sum_{j=1}^m (a_j + a_{m-j+1}) = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_m)$$

Per tant,

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \geq m \cdot (n + 1)$$

com volíem veure.