



60 Olimpíada Matemàtica Espanyola
Fase Local - Illes Balears
Primera Sessió



Problema 1. Siguin p un nombre primer senar i k un enter positiu tal que $\sqrt{k^2 - pk}$ és també un enter positiu. Trobeu k en funció de p .

Problema 2. Trobeu totes les ternes (x, y, z) de nombres reals positius que satisfan el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + \sqrt{y + 11} = \sqrt{y + 76} \\ y + \sqrt{z + 11} = \sqrt{z + 76} \\ z + \sqrt{x + 11} = \sqrt{x + 76} \end{cases}$$

Problema 3. Sobre els costats AB i CA d'un triangle rectangle ABC , amb l'angle recte en A , es construeixen, al seu exterior, quadrats $ABFG$ i $ACKH$. Si CF i BK intersequen AB i AC en els punts L i M , respectivament, proveu que AL és igual a AM .



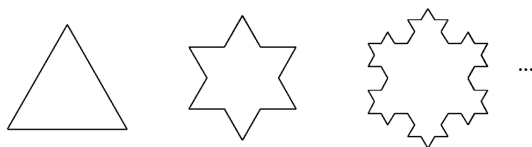
60 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió



Problema 4. Considerem una successió de corbes $P_0, P_1, P_2, \dots$. En la figura de sota teniu representades les tres primeres corbes de la seqüència: P_0 a l'esquerra, P_1 al centre, i P_2 a la dreta. Suposem que la regió tancada per la corba P_0 té àrea 1, i que P_0 és un triangle equilàter. Per a tot $k \geq 0$, s'obté P_{k+1} a partir de P_k procedint com indiquem a continuació: primer trisequem cada costat de P_k ; després, sobre cada costat de P_k , construïm un triangle equilàter exteriorment de manera que un dels seus costats coincideixi amb el segment central obtingut per la trisecció; finalment, eliminem aquest segment central.

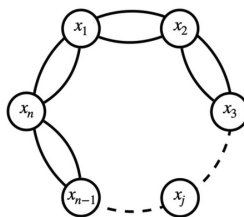


Diguem C_n el nombre de costats de la corba P_n , i diguem A_n l'àrea de la regió tancada delimitada per la corba P_n . Noteu que $C_0 = 3$ i $A_0 = 1$.

- (i) Trobeu, per a tot $n \geq 0$, una expressió que descrigui C_n en termes de n .
- (ii) Trobeu, per a tot $n \geq 0$, una expressió que descrigui A_n en termes de n .

Nota. Cal provar que les expressions obtingudes són correctes.

Problema 5. Sigui n un nombre natural major que 2. Suposem que hi ha n illes $x_1, \dots, x_n$ ubicades sobre un cercle, i que entre cada dues illes veïnes, hi ha dos ponts com es mostra en la figura.



Començant per l'illa x_1 , de quantes maneres es poden recórrer els $2n$ ponts passant per cada un d'ells exactament una vegada?

Problema 6. Resoleu ambdós apartats.

- (i) Proveu que hi ha infinits nombres naturals de la forma $\underbrace{3333333 \dots 3}_{\text{tots tresos}} 7$ que són múltiples de 37.
- (ii) Proveu que hi ha infinits nombres naturals de la forma $\underbrace{3333333 \dots 3}_{\text{tots tresos}} 1$ que són múltiples de 31.



60 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Primera Sessió

Solucions a càrrec de *Joan Carles Pons* i *Miquel Amengual Covas*



Problema 1. Sigui p un nombre primer senar i k un enter positiu tal que $\sqrt{k^2 - pk}$ és també un enter positiu. Trobeu k en funció de p .

Solució.

Sigui $n = \sqrt{k^2 - pk}$ amb n enter positiu. Llavors, prenent quadrats, $k^2 - pk - n^2 = 0$, d'on s'obté

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2} \quad (1)$$

Com k és enter (positiu), $p^2 + 4n^2$ ha de ser un quadrat perfecte. Llavors diguem $m^2 = p^2 + 4n^2$ amb m enter positiu, d'on s'obté $p^2 = (m - 2n)(m + 2n)$. Com p és primer i $m - 2n < m + 2n$, només pot ser $m - 2n = 1$, i $m + 2n = p^2$. Resolent l'equació obtenim $m = \frac{p^2+1}{2}$ i $n = \frac{p^2-1}{4}$.

Si substituïm en (1) s'obté $k = \frac{p \pm m}{2} = \frac{2p \pm (p^2+1)}{4}$, d'on (descartant la solució amb el $-$) podem concloure que

$$k = \frac{(p+1)^2}{4}.$$

Problema 2. Trobeu totes les ternes (x, y, z) de nombres reals positius que satisfan el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + \sqrt{y + 11} = \sqrt{y + 76} \\ y + \sqrt{z + 11} = \sqrt{z + 76} \\ z + \sqrt{x + 11} = \sqrt{x + 76} \end{cases}$$

Solució.

De la primera equació s'obtenen les identitats

$$x = \sqrt{y + 76} - \sqrt{y + 11}$$

i

$$x(\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}) = 65,$$

d'on podem deduir que

$$x = \frac{65}{\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}}.$$

De manera semblant s'obté

$$y = \frac{65}{\sqrt{z + 76} + \sqrt{z + 11}},$$

i

$$z = \frac{65}{\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}}.$$

Suposem ara que $x \leq y \leq z$ (partint d'una altra ordenació d'aquestes arbitràriem a la mateixa conclusió). Llavors com la funció $\sqrt{t}$ és creixent, es té que

$$\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11} \leq \sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11} \leq \sqrt{z + 76} + \sqrt{z + 11}.$$

Per tant

$$\frac{65}{\sqrt{z + 76} + \sqrt{z + 11}} \leq \frac{65}{\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}} \leq \frac{65}{\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}},$$

llavors

$$y \leq x \leq z.$$

Ara com $x \leq y \leq z$ i $y \leq x \leq z$, es dedueix que $x = y$. Llavors

$$x = \frac{65}{\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}} = \frac{65}{\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}} = z.$$

Per tant, es té $x = y = z$.

En particular, com $x = y$, podem escriure

$$x(\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}) = 65 \tag{2}$$

Com la funció $\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}$ és estrictament creixent per reals positius x , l'equació (2) té com a molt una solució. Com $x = 5$ és solució, només la terna $(5, 5, 5)$ satisfà el sistema d'equacions de l'enunciat.

Problema 3. Sobre els costats AB i CA d'un triangle rectangle ABC , amb l'angle recte en A , es construeixen, al seu exterior, quadrats $ABFG$ i $ACKH$. Si CF i BK intersequen AB i AC en els punts L i M , respectivament, proveu que AL és igual a AM .

Solució.

PRIMERA SOLUCIÓ.

Posem a, b, c per indicar les longituds dels costats del triangle donat oposats a A, B, C .

Posem $\overline{AL} = x$ i $\overline{AM} = y$. Aleshores, $\overline{LB} = c - x$ i $\overline{MC} = b - y$.

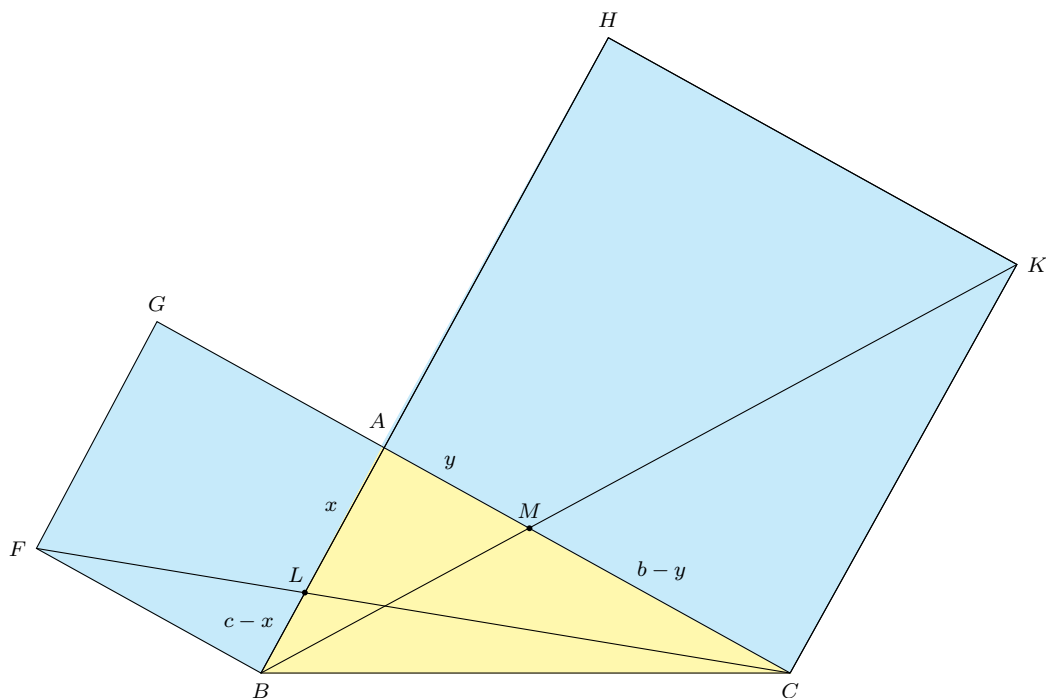
Els triangles rectangles FBL i LAC són semblants, com també ho són semblants els KCM i BAM .

En conseqüència,

$$\frac{x}{c-x} = (\triangle FBL \simeq \triangle LAC) = \frac{b}{c} = (\triangle KCM \simeq \triangle BAM) = \frac{b-y}{y},$$

d'on deduïm que

$$x = y \left(= \frac{bc}{b+c} \right).$$



SEGONA SOLUCIÓ.

Els triangles BMA i BKH són semblants, com també ho són semblants $\triangle CAL$ i $\triangle CGF$.

En conseqüència,

$$\frac{AM}{KH} = \frac{AB}{HB} \quad \frac{AL}{FG} = \frac{CA}{CG}.$$

Dividint aquestes igualtats s'obté

$$\frac{AM}{AL} \cdot \frac{FG}{KH} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{CG}{HB}.$$

D'aquí aïllem $\frac{AM}{AL}$,

$$\frac{AM}{AL} = \frac{AB}{FG} \cdot \frac{KH}{CA} \cdot \frac{CG}{HB}.$$

Atès que $AB = FG$, $KH = CA$ i $CG = (CA + AG = HA + AB) = HB$, resulta $\frac{AM}{AL} = 1$ i, per tant,

$$AM = AL,$$

com es volia.



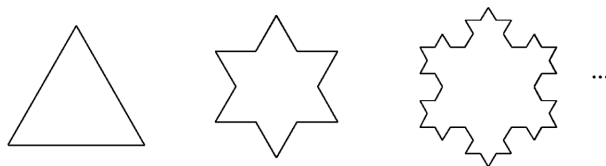
60 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió

Solucions a càrrec de Joan Carles Pons i Miquel Amengual Covas

Problema 4. Considerem una successió de corbes $P_0, P_1, P_2, \dots$. En la figura de sota teniu representades les tres primeres corbes de la seqüència: P_0 a l'esquerra, P_1 al centre, i P_2 a la dreta. Suposem que la regió tancada per la corba P_0 té àrea 1, i que P_0 és un triangle equilàter. Per a tot $k \geq 0$, s'obté P_{k+1} a partir de P_k procedint com indiquem a continuació: primer trisequem cada costat de P_k ; després, sobre cada costat de P_k , construïm un triangle equilàter exteriorment de manera que un dels seus costats coincideixi amb el segment central obtingut per la trisecció; finalment, eliminem aquest segment central.



Diguem C_n el nombre de costats de la corba P_n , i diguem A_n l'àrea de la regió tancada delimitada per la corba P_n . Noteu que $C_0 = 3$ i $A_0 = 1$.

- (i) Trobeu, per a tot $n \geq 0$, una expressió que descrigui C_n en termes de n .
- (ii) Trobeu, per a tot $n \geq 0$, una expressió que descrigui A_n en termes de n .

Nota. Cal provar que les expressions obtingudes són correctes.

Solució.

- (i) Notem que, per cada costat de P_k , s'obtenen 4 costats en P_{k+1} . Per tant, per a tot $k \geq 0$, es té

$$C_{k+1} = C_k \cdot 4. \quad (1)$$

Com $C_0 = 3$, deduïm que $C_n = 3 \cdot 4^n$, per a tot $n \geq 0$.

Provem la veracitat de l'expressió per inducció per a tot $n \geq 0$. El cas base ($n = 0$) és directe donat que $3 \cdot 4^0 = 3$. Suposem ara que el resultat és cert per a $k = n$ i provem-ho per $k + 1$. Ara bé, per (1), tenim que $C_{k+1} = C_k \cdot 4$ i, per hipòtesi d'inducció, $C_{k+1} = C_k \cdot 4 = (3 \cdot 4^k) \cdot 4 = 3 \cdot 4^{k+1}$, com volíem veure.

- (ii) Indiquem per L_n la longitud de cada costat de la corba P_n , per $n \geq 0$. Recordem que l'àrea d'un triangle equilàter de costat l és $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. Com el triangle P_0 és equilàter, d'àrea 1, i costat L_0 , es té $L_0 = \frac{2}{3^{1/4}}$. Llavors,

com els costats de P_0 son trisecats per l'obtenció de P_1 , tenim $L_1 = \frac{L_0}{3} = \frac{2}{3^{1/4+1}}$ i, en general, per a tot $n \geq 0$,

$$L_n = \frac{2}{3^{1/4+n}}.$$

Per tant, en la corba P_{k+1} , l'àrea de cada triangle equilàter (petit) afegit exteriorment sobre els seus costats és

$$\frac{\sqrt{3}}{4} L_{k+1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3^{1/4+(k+1)}} \right)^2 = \frac{1}{3^{2(k+1)}}.$$

Ara doncs, per calcular A_{k+1} basta afegir a l'àrea d' A_k , l'àrea corresponent de tots els triangles (petits) afegits sobre els seus costats. Com tenim $3 \cdot 4^k$ costats sobre els que afegir els triangles, es té

$$A_{k+1} = A_k + 3 \cdot 4^k \cdot \frac{1}{3^{2(k+1)}} \quad (2)$$

Així doncs tenim

$$A_1 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$A_2 = 1 + \frac{1}{3} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}$$

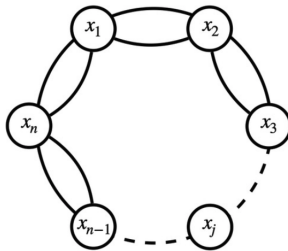
$$A_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^6} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5}$$

I més en general

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1}}{3^{2k-1}} \\ &= 1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k \\ &= 1 + \frac{3}{4} \frac{\frac{4}{9}[1-(\frac{4}{9})^n]}{1-\frac{4}{9}} \\ &= 1 + \frac{3}{5} [1 - (\frac{4}{9})^n] \\ &= \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

Per tant, només caldria provar que per a tot $n \geq 0$ es té $A_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n$. La prova per inducció és directa a partir de (2) i manipulant adientment les expressions.

Problema 5. Sigui n un nombre natural major que 2. Suposem que hi ha n illes $x_1, \dots, x_n$ ubicades sobre un cercle, i que entre cada dues illes veïnes, hi ha dos ponts com es mostra en la figura.



Començant per l'illa x_1 , de quantes maneres es poden recórrer els $2n$ ponts passant per cada un d'ells exactament una vegada?

Solució. Notem que existeix simetria entre *començar* el recorregut en el sentit horari o fer-ho en sentit anti-horari. Per tant, bastarà calcular, començant per l'illa x_1 , i fent el primer moviment en sentit horari (és a dir, cap a x_2), de quantes maneres es poden recórrer els $2n$ ponts passant per cada un d'ells exactament una vegada, i finalment, multiplicar el resultat per 2.

Ara, podem separar els recorreguts amb dos conjunts disjunts:

- (a) Aquells consistents amb fer dues voltes completes.
- (b) Aquells que, partint de x_1 , arriben amb sentit horari a un vèrtex $x_j \in \{x_2, \dots, x_n, x_1\}$, retornen a x_1 amb sentit anti-horari; llavors, partint de x_1 , i amb sentit anti-horari, arriben fins a x_j i, finalment, retornen a x_1 amb sentit horari.

Recorreguts del tipus (a) n'hi ha 2^n ; per fer la primera volta tenim 2 ponts per escollir en cada una de les n passes i, un cop finalitzada la volta, només queda 1 pont per escollir en cada passa.

De recorreguts del tipus (b), n'hi ha $n2^n$; vegem-ho. Fixat $x_j \in \{x_2, \dots, x_n, x_1\}$, hi ha 2^{j-1} recorreguts possibles per anar (amb sentit horari) de x_1 fins a x_j (hem de seleccionar $j - 1$ ponts i tenim 2 opcions possibles en cada selecció); llavors per anar de x_j fins a x_1 en sentit antihorari només hi ha un recorregut possible consistent amb seleccionar tots aquells ponts no emprats en el recorregut anterior. De manera semblant hi ha 2^{n-j+1} recorreguts possibles per anar (amb sentit anti-horari) de x_1 a x_j , i només 1 per retornar a x_1 . En resum, per cada $j \in \{1, \dots, n\}$, tenim $2^{j-1} \cdot 2^{n-j+1} = 2^n$ recorreguts possibles. Per tant, hi ha $n2^n$ recorreguts de tipus (b).

Llavors la solució al problema és $2 \cdot (2^n + n2^n) = 2^{n+1}(n + 1)$.

Problema 6. Resoleu ambdós apartats.

- (i) Provau que hi ha infinits nombres naturals de la forma $\underbrace{3333333 \dots 3}_{\text{tots tresos}} 7$ que són múltiples de 37.
- (ii) Provau que hi ha infinits nombres naturals de la forma $\underbrace{3333333 \dots 3}_{\text{tots tresos}} 1$ que són múltiples de 31.

Solució.

- (i) Si calculem els primers múltiples de 37,

$$37 \times 1, \quad 37 \times 2, \quad 37 \times 3, \dots$$

tot seguit arribem a $37 \times 9 = 333$, d'on deduïm que també són múltiples de 37 els nombres de la següent forma:

$$\begin{array}{rcl} 333 \times 100 & + & 37 = 33337 \\ 333333 \times 100 & + & 37 = 3333337 \\ 33333333 \times 100 & + & 37 = 333333337 \\ & & \vdots \end{array}$$

és a dir, els infinits nombres naturals

$$\frac{10^{3n} - 1}{3} \cdot 100 + 37, \quad \text{essent } n = 1, 2, 3, \dots$$

- (ii) PRIMERA SOLUCIÓ

Aplicar el mateix que acabam de fer amb el nombre 37, suposa efectuar les succesives multiplicacions $31 \times 1, 31 \times 2, 31 \times 3, \dots$ fins adonar-se que 31×10752688172043 és el primer nombre natural múltiple de 31 amb totes les seves xifres iguals a 3:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 7 \ 5 \ 2 \ 6 \ 8 \ 8 \ 1 \ 7 \ 2 \ 0 \ 4 \ 3 \\ \times \ 3 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 7 \ 5 \ 2 \ 6 \ 8 \ 8 \ 1 \ 7 \ 2 \ 0 \ 4 \ 3 \\ 3 \ 2 \ 2 \ 5 \ 8 \ 0 \ 6 \ 4 \ 5 \ 1 \ 6 \ 1 \ 2 \ 9 \\ \hline 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array}$$

Se'n dedueix que els infinits nombres de la forma

$$\begin{array}{rcl} 33333333333333 \times 100 & + & 31 = 333333333333331 \\ 33333333333333333333333333 \times 100 & + & 31 = 333333333333333333333333331 \\ & & \vdots \end{array}$$

és a dir, els nombres naturals

$$\frac{10^{15n} - 1}{3} \cdot 100 + 31, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

són múltiples de 31.

SEGONA SOLUCIÓ

Alternativament, considerem els següents trenta-dos nombres

$$3, \quad 33, \quad 333, \quad 3333, \dots, \underbrace{333333 \dots 33}_{\text{trenta-dos tresos}}$$

Aplicant el principi del colomer o de Dirichlet, almenys dos d'aquests nombres,

$$\underbrace{33333 \dots 33}_{m \text{ xifres}} \quad \text{i} \quad \underbrace{33333 \dots 33}_{n \text{ xifres}},$$

donen el mateix residu en dividir-los per 31 i, per tant, la seva diferència serà un múltiple de 31.

Així, doncs, si suposam $m > n$, el nombre

$$\underbrace{33333 \dots 33}_{m \text{ xifres}} - \underbrace{33333 \dots 33}_{n \text{ xifres}} = \underbrace{33333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} \underbrace{00000 \dots 00}_{n \text{ xifres}} = \underbrace{33333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} \cdot 10^n$$

és divisible per 31. Com que 31 és primer amb 10, també ho és primer amb 10^n . Pel teorema fonamental de l'aritmètica, se'n dedueix que 31 divideix $\underbrace{33333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}}$ i els infinits nombres

$$\underbrace{3333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} 31, \quad \underbrace{3333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} \underbrace{3333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} 31, \quad \underbrace{3333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} \underbrace{3333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} \underbrace{3333 \dots 33}_{m-n \text{ xifres}} 31, \dots$$

són múltiples de 31.